3ME CYCLE

D'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR

N° d'ordre : 140

THÈSE

PRÉSENTÉE

A L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX-I

POUR L'OBTENTION DU DIPLOME DE

DOCTEUR INGÉNIEUR

PAR

Jean-Pierre L. SAGASPE

INGÉNIEUR ARTS ET MÉTIERS

ASSISTANT A L'E. N. S. A. M.

Identification d'un système linéaire multivariable. Application à un processus industriel.

Soutenue le 24 Janvier 1972, devant la commission d'examen :

MM. SURDIN, Professeur	*Président*
SALARDENNE, Maître de Conférences	*Examinateurs*
PRUDHOMME, Professeur au C.N.A.M. et à l'E.N.S.A.M.	*Examinateurs*
LIZARAZU, Professeur à l'E.N.S.A.M.	*Examinateurs*

— 1972 —

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547315_0012

3ME CYCLE

D'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR

N° d'ordre : 140

THÈSE

PRÉSENTÉE

A L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX-I

POUR L'OBTENTION DU DIPLOME DE

DOCTEUR INGÉNIEUR

PAR

Jean-Pierre L. SAGASPE

INGÉNIEUR ARTS ET MÉTIERS

ASSISTANT A L'E. N. S. A. M.

Identification d'un système linéaire multivariable. Application à un processus industriel.

Soutenue le 24 Janvier 1972, devant la commission d'examen :

MM. SURDIN, Professeur	*Président*
SALARDENNE, Maître de Conférences	*Examinateurs*
PRUDHOMME, Professeur au C.N.A.M. et à l'E.N.S.A.M.	*Examinateurs*
LIZARAZU, Professeur à l'E.N.S.A.M.	*Examinateurs*

— 1972 —

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Ce travail est dédié à Monsieur SURDIN , Professeur à l'Université de Bordeaux I . Je lui suis reconnaissant de m'avoir accordé sa confiance , et je le remercie pour le soutien moral et amical qu'il m'a apporté tout au long de ces trois années .

Je remercie Messieurs SALARDENNE, PRUDHOMME, et LIZARAZU d'avoir accepté si aimablement de siéger à ce jury .

Merci à Monsieur LIZARAZU de s'être chargé de corriger et de critiquer le manuscrit .

Je me permets d'associer à ces remerciements Monsieur PICAND, Directeur de l'E.N.S.A.M. de Bordeaux, qui m'a permis de réaliser mes projets . Qu'il veuille bien trouver ici l'expression de ma respectueuse gratitude .

S O M M A I R E

		Pages
Chapitre 1 :	Introduction	2
1ère partie :	CALCUL DES REPONSES IMPULSIONNELLES D'UN SYSTEME MULTIVARIABLE .	11
Chapitre 2 :	Déconvolution numérique avec emploi de la méthode des moindres carrés .	12
Chapitre 3 :	Emploi de diverses techniques de corrélations .	22
2ème partie :	CALCUL DU DENOMINATEUR DE LA TRANSMITTANCE .	42
Chapitre 4 :	Calcul des termes du dénominateur .	43
Chapitre 5 :	Principe des fonctions automodulatrices pour un système monovariable .	50
3ème partie :	CALCUL DU NUMERATEUR DE LA TRANSMITTANCE .	60
Chapitre 6 :	Calcul des termes du numérateur .	61
Chapitre 7 :	Méthode des directions conjuguées pour la recherche d'un minimum d' une fonction de plusieurs variables .	67
Chapitre 8 :	Programme de simulation linéaire .	72
4ème partie :	APPLICATION A L'IDENTIFICATION D'UN PROCESSUS INDUSTRIEL MULTIVARIABLE .	82
Conclusion		94
Annexes		95
Listings des différents programmes utilisés .		96
Bibliographie .		113

introduction

CHAPITRE 1

I N T R O D U C T I O N

On se propose d'identifier un processus industriel (alambic de distillation) .

Cette identification est nécessaire pour une meilleure connaissance du système considéré , pour une étude critique de son fonctionnement actuel , et pour une éventuelle optimalisation de son fonctionnement futur .

Les conditions particulières de l'étude m'ont amené à recenser les méthodes d'identification connues , à tester un certain nombre d'entre elles , et à proposer quelques contributions à ce sujet .

Les méthodes d'identification étant intimement liées au type de processus à identifier , il est nécessaire que je décrive sommairement ce processus de distillation .

1 - Description du processus .

Le processus choisi est un alambic intermittent à production d'alcool aromatisé utilisé pour la préparation d'une liqueur (anisette) .

L'alambic est un appareil distillatoire très ancien . Il apparait dans l'histoire des sciences au début de l'ère chrétienne . Un texte de PLINE parle d'un appareil pour la préparation de l'essence de térébenthine . Le premier alambic est figuré dans un ouvrage de ZOSIME (IIIsiècle après J. C.) .

Le plus ressemblant à nos alambics est l'appareil décrit et figuré par SYNESIUS , à la fin du IV siècle : on y voit une chaudière chauffée sur un bain de cendres et surmontée d'un chapiteau avec un vase de condensation . Ces appareils servaient à distiller " les eaux divines " .

L'alambic étudié est composé des éléments suivants :

1- une chaudière de distillation ("cucurbite") , où on place les matières à distiller ; elle est chauffée par un bain-marie lui-même chauffé par un serpentin de vapeur .
La chaudière est couverte par un dôme de cuivre ou "chapiteau" offrant une importante surface de rayonnement propre à favoriser une condensation de fractions alcooliques à bas degré .

2- un col-de-cygne .

3- un "déflegmateur" qui opère une condensation fractionnée des vapeurs . Les "flegmes" sont constitués par les substances les plus volatiles (alcool de faible degré , éthers , huiles essentielles de mauvais goût) . Ils sont recyclés vers la cucurbite .
Le déflegmateur est à refroidissement par eau dans des faisceaux tubulaires .

4- un "serpentin" , échangeur tubulaire à circulation d'eau froide condense fortement les vapeurs alcooliques .

5- un réfrigérant secondaire ramène le produit obtenu à la température exigée 15°C .

6- un récipient ("conge") recueille le distillat obtenu .

7- une éprouvette de contrôle (degré de l'alcool et température).

2 - Description du fonctionnement .

La conduite de l'alambic est délicate , elle est confiée à des spécialistes distillateurs .

On opère de la façon suivante :

- On part d'une solution de 470 litres d'alcool à 40° alcooliques

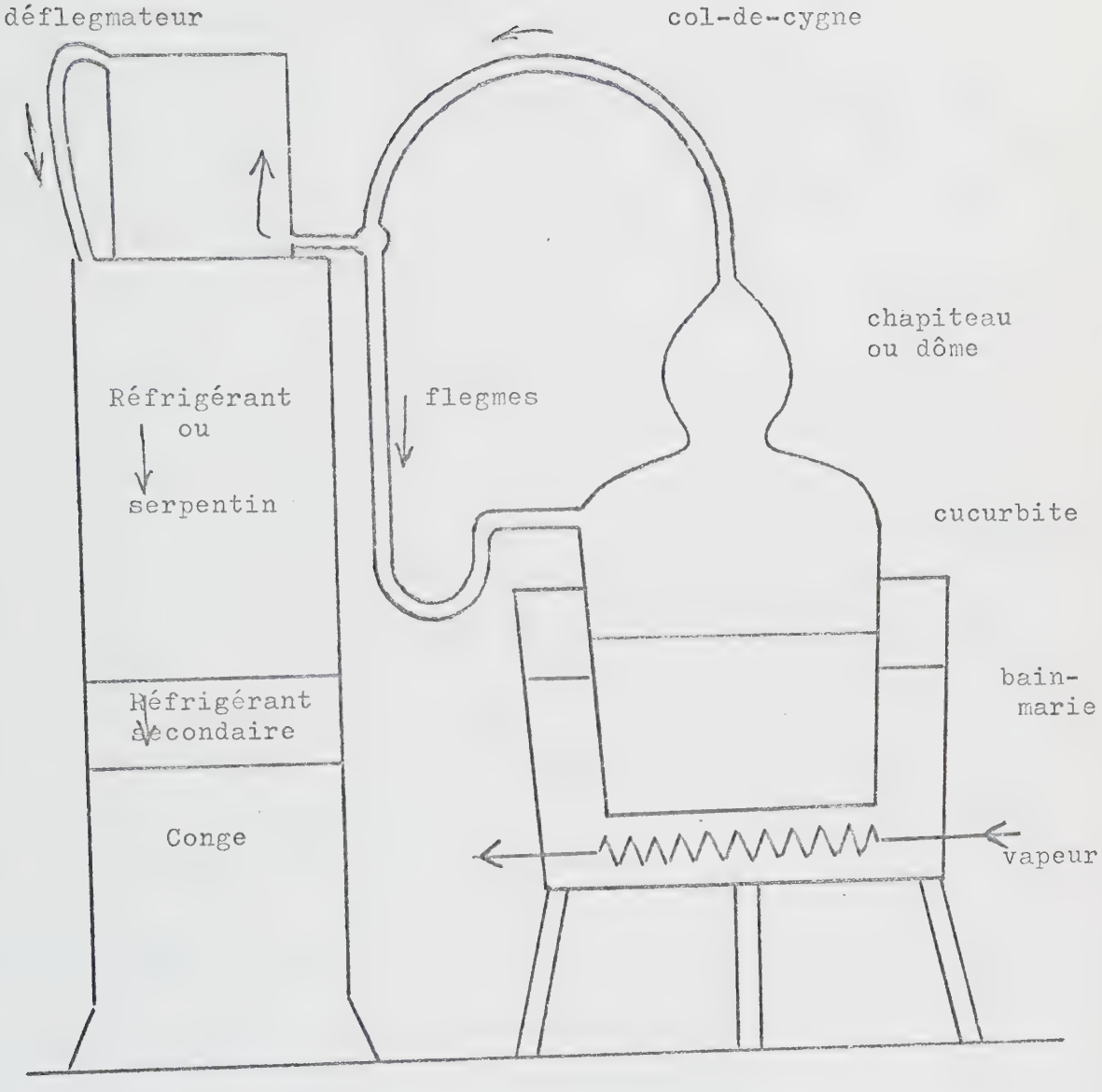


schéma de l'alambic de distillation

et de 100 litres d'eau . Pendant une nuit , on y fait macérer 148,5 kg de graines d'anis (plante dicotylédone , appelée Pimpinella anisum , originaire d'Orient , cultivée pour les propriétés excitantes de ses graines d'odeur aromatique) .

- On distille pendant une journée .

- Le jour suivant , on rectifie (distillation très poussée) en éliminant le distillat de degré alcoolique inférieur à 80° , (l'expérience montre qu'un distillat de degré inférieur à 80° contient des huiles essentielles d'anis de très mauvais goût) .

3 - Description du problème d'identification .

3 1 - Nature du problème .

Pour l'identification du processus , il était impossible pour des raisons techniques et économiques de faire varier selon notre volonté les variables d'entrée du processus . La seule méthode possible restait donc l'observation des différentes variables (entrées et sorties) dans le temps . Il s'agit ensuite de déterminer , à partir de ces enregistrements leurs liens intimes .

La matière première consiste donc en l'enregistrement de toutes les variables en fonction du temps .

3 2 - Variables d'entrée .

J'ai recensé les variables d'entrée pouvant agir sur l'alambic :

1) Caractéristiques de la vapeur :
débit , pression , température .

2) Caractéristiques de l'eau du déflegmateur :
température d'entrée , débit .

3) Caractéristiques de l'eau du serpentin :
température d'entrée , débit .

4) Caractéristiques du réfrigérant secondaire :
température d'entrée , débit .

Les variables d'entrée énumérées seront considérées comme indépendantes entre elles , et indépendantes des variables de sortie (c'est une approximation , car , par exemple , l'eau de refroidissement est recyclée , et dépend donc des variables de sortie) .

D'un point de vue théorique , d'autres éléments interviennent : ce sont les variables qui décrivent l'état initial du système (température de l'alambic , charge de l'alambic) . Je les suppose constantes (c'est une approximation , car , par exemple , la distillation est plus difficile le lundi , après le refroidissement prolongé du week-end) .

3 3 - Variables de sortie .

J'ai recensé les variables de sortie , exclusivement les caractéristiques de l'alcool :

- débit instantané (et cumulé pour vérification) .
- température de l'alcool .
- degré alcoolique

J'ai aussi pris certains points de mesure pour diverses vérifications :

- caractéristiques de la vapeur à la sortie ;
- caractéristiques du bain-marie ;
- caractéristiques du recyclage ;
- température de sortie des différentes eaux ;
- température de la cucurbite .

3 4 - Mesures .

Ces mesures ont été effectuées environ toutes les trois minutes , pendant deux journées de Janvier 1969 , de 6 heures à 16 heures (1) .

Il faut signaler que la pose des différents capteurs sur l'alambic exigeait son arrêt : trois jours au montage et trois jours au démontage . Ceci a limité nos possibilités de mesure . En outre , ces capteurs devaient être simples , peu coûteux et exister dans le matériel de l'usine ; aussi la précision des mesures est-elle limitée .

On a utilisé :

- pour les débits : des récipients gradués et des chronomètres .

- pour le débit massique de vapeur : la vapeur a été condensée par un serpentin immergé . On a mesuré le débit d'eau résultant .

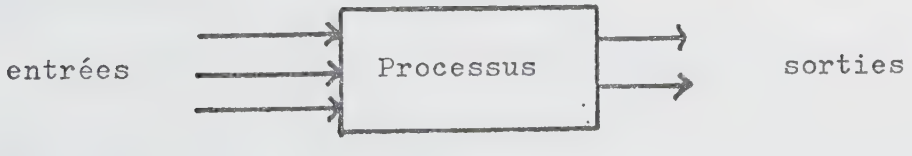
- pour les températures : des thermocouples reliés à un enregistreur à six voies .

- pour les pressions : des manomètres .

- pour le degré alcoolique : l'alcoolmètre Gay-Lussac .

3 5 - Simplification du modèle .

L'alambic est donc réduit au schéma habituel :



(1) Je remercie , ici , J. Langla qui m'a aidé durant ces deux journées de mesures .

Il faut préciser que l'étude faite se rapporte à un alambic mis en service en Janvier 1969 , et à une charge initiale donnée (masse d'anis , alcool , eau) .

Les mesures ont été faites pour une température d'eau de refroidissement constante (18°C) . Cette température est liée aux conditions atmosphériques et à toutes les variables du fonctionnement de l'alambic (l'eau étant recyclée après refroidissement extérieur) . On constate que , si cette température augmente (notamment au mois de Juillet) , la rectification est plus délicate à effectuer .

On considère seulement les variables d'entrée qui agissent d'une manière sensible sur les sorties . Le modèle se réduit donc à :

4 entrées :
- débit massique de vapeur
- débit d'eau du déflegmateur
- débit d'eau du serpentin
- débit d'eau du refroidissement secondaire (uniquement pour la rectification)

2 sorties :
- débit d'alcool
- degré alcoolique (ramené à 15°C grâce à des tables officielles) .

Il y a deux modèles différents : l'un correspondant à la distillation , l'autre à la rectification .

4 - Présentation de la méthode choisie .

Certaines hypothèses ont été faites au départ :

1) On étudie seulement les variations des variables autour de leur valeur moyenne , et on suppose que , pour ces variations , le système est régi par des équations différentielles linéaires à coefficients constants .

2) Les retards purs (importants dans les tuyauteries) seront déterminés d'une manière empirique , par observation directe des enregistrements des différentes variables .

Le système , étant multivariable , j'ai pensé que la première opération devait consister à "démêler" les entrées , et à trouver une réponse impulsionnelle caractéristique de chaque couple entrée/sortie . Ceci a été tenté de différentes manières et constitue la première partie de l'étude .

Ensuite , pour chaque réponse impulsionnelle , on va chercher une transmittance approchée . Le calcul des coefficients du dénominateur sera fait par la méthode des " fonctions auto-modulatrices " . Ceci constitue la deuxième partie de l'étude .

Pour le calcul du numérateur , connaissant la réponse impulsionnelle et le dénominateur , on minimisera l'écart quadratique moyen entre la réponse impulsionnelle donnée et une réponse impulsionnelle obtenue par simulation . On trouvera donc dans la troisième partie de l'étude la méthode de calcul , la méthode de minimisation (ces deux concepts étant liés) et une méthode de simulation de systèmes linéaires simple et performante .

La dernière partie exposera les résultats obtenus sur le processus de distillation .

1ère partie

CALCUL DES REPONSES IMPULSIONNELLES
D'UN SYSTEME MULTIVARIABLE .

CHAPITRE 2

DECONVOLUTION NUMERIQUE AVEC EMPLOI DE LA METHODE DES MOINDRES CARRES

1 - Méthode .

Considérons un système linéaire monovariable d'entrée e(t) et de sortie s(t) . On cherche à calculer , à partir des enregistrements e(t) et s(t) , une réponse impulsionnelle qui soit la plus caractéristique du système . On choisit , comme réponse impulsionnelle h(t) la plus caractéristique , celle qui minimise la quantité :

$$\int_0^\infty (s(t) - s_1(t))^2 \, dt$$

avec $$s_1(t) = \int_0^\infty h(\tau) \, e(t-\tau) \, d\tau$$

Sous forme discrète , si Δt est le pas du calcul , et si la réponse h(t) tend asymptotiquement vers zéro , on peut écrire :

$$(1) \qquad s_1(n.\Delta t) = (h_1 e_n + h_2 e_{n-1} + \cdots + h_m e_{n-m+1}) \Delta t$$

h_i et e_i étant les valeurs respectives de $h(i \Delta t)$ et de $e(i \Delta t)$ et m étant un entier tel que :

$$p > m \implies h_p = 0$$

Soit :

$$(2) \qquad \varepsilon (n \Delta t) = S(n \Delta T) - s_1(n \Delta t)$$

On cherche à minimiser la quantité Q : $Q = \sum_{n=1}^{N} \varepsilon^2 (n \Delta t)$

(N étant le nombre de valeurs disponibles de s(t)) .

On écrit pour cela :

$$(3) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial h_1} = 0 \\ \cdots\cdots \\ \dfrac{\partial Q}{\partial h_m} = 0 \end{cases}$$

2 - Calcul de la réponse impulsionnelle .

Les N équations du type (1) peuvent s'écrire sous forme matricielle :

$$\underline{S_1} = \begin{vmatrix} s_1(\Delta t) \\ s_1(2\Delta t) \\ \vdots \\ s_1(m\Delta t) \\ \\ s_1(N\Delta t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_1 & & & \\ e_2 & e_1 & & \\ e_3 & e_2 & e_1 & \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ e_m & e_{m-1} & \cdots & e_1 \\ \cdots & \cdots & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ e_N & e_{N-1} & \cdots & e_{N-m+1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{vmatrix} \cdot \Delta t$$

$$\underline{S_1} = E \cdot \underline{h} \cdot \Delta t$$

E est une matrice de m colonnes et de N lignes , $\underline{S_1}$ et $\underline{h}$ sont deux vecteurs respectivement de N et m composantes .

Calculons : $\dfrac{\partial Q}{\partial h_p}$

$$Q = \sum_{n=1}^{N} \varepsilon^2 (n\Delta t)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial h_p} = \sum_{n=1}^{N} 2\,\varepsilon(n\Delta t)\,\frac{\partial \varepsilon(n\Delta t)}{\partial h_p}$$

On calcule $\dfrac{\partial \mathcal{E}(n\Delta t)}{\partial h_p}$ à partir de l'équation (2)

$$\frac{\partial \mathcal{E}(n\Delta t)}{\partial h_p} = - e_{n-p+1} \cdot \Delta t$$

Donc :

$$\frac{\partial Q}{\partial h_p} = -\sum_{n=1}^{N} 2\,\mathcal{E}(n\Delta t) \cdot e_{n-p+1} \cdot \Delta t$$

ou sous forme matricielle :

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial Q}{\partial h_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial Q}{\partial h_m} \end{vmatrix} = -2\Delta t \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_m & \cdots & e_N \\ 0 & e_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & & e_1 & \cdots & e_{N-m+1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \\ \\ \varepsilon_N \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \underline{h}} = - 2\,\Delta t \cdot E^T \cdot \underline{\mathcal{E}}$$

or $\quad \underline{\mathcal{E}} = \underline{S} - E\,\underline{h}\,\Delta t$

$$\frac{\partial Q}{\partial \underline{h}} = - 2\,\Delta t \cdot E^T \cdot \underline{S} + 2\,\Delta t \cdot E^T E\,\underline{h}\,\Delta t$$

Le vecteur $\underline{h}$ optimal est donné par :

$$\Delta t \cdot E^T \cdot E\,\underline{h} = E^T\,\underline{S}$$

$$\boxed{\underline{h} = \frac{1}{\Delta t} (E^T E)^{-1} E^T \underline{S}}$$

3- Remarque .

Il est évident que ce calcul n'a de sens que si $N \geqslant m$

Dans le cas particulier où $N = m$, les matrices E et E^T sont carrées , et peuvent être inversées .

$$\underline{h} = \frac{1}{\Delta t} \cdot E^{-1} (E^T)^{-1} E^T \underline{S} = \frac{1}{\Delta t} E^{-1} \underline{S}$$

On retrouve la solution ordinaire .

4 - Cas d'un système multivariable .

La méthode précédente peut être étendue à un système multivariable . L'étude d'un système à r entrées et q sorties peut être ramenée à l'étude de q sous-systèmes à une sortie et à r entrées ; on a alors , pour une sortie considérée :

$$s(t) = s^1(t) + s^2(t) + \ldots + s^r(t)$$

avec $s^i(t) = \int_0^\infty h^i(\tau)\, e^i(t-\tau)\, d\tau \qquad i \in [1,r]$

Soit $\underline{h^i}$ le vecteur caractéristique de la réponse impulsionnelle $h^i(t)$ correspondant à s(t) et à $e^i(t)$;et soit E^i la matrice définie par :

$$E^i = \begin{vmatrix} e^i_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ e^i_2 & e^i_1 & 0 & 0 & & 0 \\ e^i_3 & e^i_2 & e^i_1 & 0 & & 0 \\ e^i_m & e^i_{m-1} & \ldots & \ldots & & e^i_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^i_N & & & & & e^i_{N-m+1} \end{vmatrix}$$

On obtient :

$$\frac{\partial Q}{\partial h_p^i} = \sum_{n=1}^{N} 2\,\varepsilon(n\Delta t)\,\frac{\partial \varepsilon(n\Delta t)}{\partial h_p^i} = -2\sum_{n=1}^{N} \varepsilon(n\Delta t)\, e^i_{n-p+1}\,\Delta t$$

$$\underline{\frac{\partial Q}{\partial h^i}} = -2\,\Delta t\,(E^i)^T\,\underline{\varepsilon} \qquad (4)$$

On appelle $\underline{h}$ le vecteur formé par l'empilage vertical des vecteurs $\underline{h^i}$ caractéristiques des réponses impulsionnelles, et $\underline{\frac{\partial Q}{\partial h}}$ le vecteur formé par l'empilage vertical des vecteurs $\underline{\frac{\partial Q}{\partial h^i}}$

$$\underline{h} = \begin{bmatrix} h_1^1 \\ h_2^1 \\ \vdots \\ h_m^1 \\ h_1^2 \\ h_2^2 \\ \vdots \\ h_m^2 \\ \vdots \\ h_1^r \\ h_2^r \\ \vdots \\ h_m^r \end{bmatrix} \qquad \underline{\frac{\partial Q}{\partial h}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial Q}{\partial h_1^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial Q}{\partial h_m^1} \\ \frac{\partial Q}{\partial h_1^2} \\ \vdots \\ \frac{\partial Q}{\partial h_m^2} \\ \vdots \\ \frac{\partial Q}{\partial h_1^r} \\ \vdots \\ \frac{\partial Q}{\partial h_m^r} \end{bmatrix}$$

On appelle E la matrice formée par l'empilage horizontal des r matrices E^i à m colonnes et N lignes correspondant à chaque variable d'entrée .

$$E = \left[\begin{array}{cccc|c} e_1^1 & 0 & 0 & 0 & \\ e_2^1 & e_1^1 & 0 & 0 & \\ & & \ddots & 0 & \\ & & & \ddots & \\ e_m^1 & e_{m-1}^1 & & e_1^1 & \\ e_N^1 & \cdots\cdots & & e_{N-m+1}^1 & \end{array}\right. \underbrace{\qquad\qquad}_{E^1} \left.\begin{array}{c} e_1^r \quad 0 \\ e_2^r \quad e_1^r \\ \\ e_m^r \quad e_{m-1}^r \quad \cdots \quad e_1^r \\ e_N^r \quad \cdots\cdots \quad e_{N-m+1}^r \end{array}\right] \underbrace{\qquad\qquad}_{E^r}$$

On peut alors écrire :

$$\frac{\partial Q}{\partial h} = -2\,\Delta t\,(E)^T\,\underline{\varepsilon}$$

or :

$$\underline{\varepsilon} = \underline{S} - \sum_{i=1}^{r} E^i\,\underline{h}^i\,\Delta t$$

$$\underline{\varepsilon} = \underline{S} - E.\underline{h}.\,\Delta t$$

On aboutit donc aux mêmes relations que dans le cas monovariable .

$$\underline{h} = \frac{1}{\Delta t}\,(E^T E)^{-1}\,E^T \underline{S}$$

5- Pratique de la déconvolution numérique .

Les ennuis rencontrés dans l'inversion de matrices de moyennes dimensions (pour un système à quatre variables , pour des réponses caculées en 40 points , la matrice a 160 lignes et 160 colonnes) m'ont amené à rechercher directement la minimisation de Q en fonction des paramètres du vecteur $\underline{h}$. Pour cela , j'ai utilisé une méthode de gradients , car le

calcul du gradient est très aisé : on a trouvé en (4) :

$$\frac{\partial Q}{\partial \underline{h}} = -2 \cdot \Delta t \cdot (E^i)^T \cdot \underline{\varepsilon}$$

avec $\underline{\varepsilon} = \underline{S} - E \cdot \underline{h} \cdot \Delta t$

Cette méthode de gradients sera expliquée plus en détail au chapître 7 .La méthode étant itérative , les calculs seront terminés :

- soit par stabilisation de la valeur de Q (à 10^{-6} près) .
- soit par atteinte d'une valeur de Q faible vis à vis de la quantité :

$$\sum_{n=1}^{N} S^2 (n \Delta t)$$

(par exemple 10^{-3} en valeur relative) .

6 - Exemples .

J'ai vérifié la méthode sur de nombreux exemples simulés numériquement .

L'exemple choisi dans les pages 19 à 21 peut paraître simple . En fait , il veut montrer l'intérêt de la méthode adoptée dans le cas où la matrice $E^T E$ est singulière .

Exemple :

Données : $s(t) = (1 - e^{-t/10}) u(t)$

u(t) étant l'échelon d'Heaveside

$e^1(t) = e^2(t) = u(t)$

N = 45

m = 40 (choisi à priori , inférieur à N)

pas du calcul : 1

Résultats prévisibles : $h^1(t) = h^2(t) = \frac{1}{20} e^{-t/10}$

Résultats calculés :

$\underline{h^1} =$

-0.1063192E-05
0.4757908E-01
0.4306005E-01
0.3894848E-01
0.3526400E-01
0.3188436E-01
0.2885742E-01
0.2611539E-01
0.2362544E-01
0.2137723E-01
0.1934763E-01
0.1750829E-01
0.1583924E-01
0.1432834E-01
0.1296433E-01
0.1173333E-01
0.1061987E-01
0.9610071E-02
0.8693588E-02
0.7863294E-02
0.7113671E-02
0.6438210E-02
0.5828491E-02
0.5274801E-02
0.4770441E-02
0.4313215E-02
0.3903126E-02
0.3535887E-02
0.3201371E-02
0.2891659E-02
0.2611292E-02
0.2368296E-02
0.2151587E-02
0.1938232E-02
0.1744760E-02
0.1601068E-02
0.1427892E-02
0.1304385E-02
0.1175939E-02
0.3188904E-02

$\underline{h^2} =$

-0.1063192E-05
0.4757908E-01
0.4306005E-01
0.3894848E-01
0.3526400E-01
0.3188436E-01
0.2885742E-01
0.2611539E-01
0.2362544E-01
0.2137723E-01
0.1934763E-01
0.1750829E-01
0.1583924E-01
0.1432834E-01
0.1296433E-01
0.1173333E-01
0.1061987E-01
0.9610071E-02
0.8693588E-02
0.7863294E-02
0.7113671E-02
0.6438210E-02
0.5828491E-02
0.5274801E-02
0.4770441E-02
0.4313215E-02
0.3903126E-02
0.3535887E-02
0.3201371E-02
0.2891659E-02
0.2611292E-02
0.2368296E-02
0.2151587E-02
0.1938232E-02
0.1744760E-02
0.1601068E-02
0.1427892E-02
0.1304385E-02
0.1175939E-02
0.3188904E-02

Remarque :

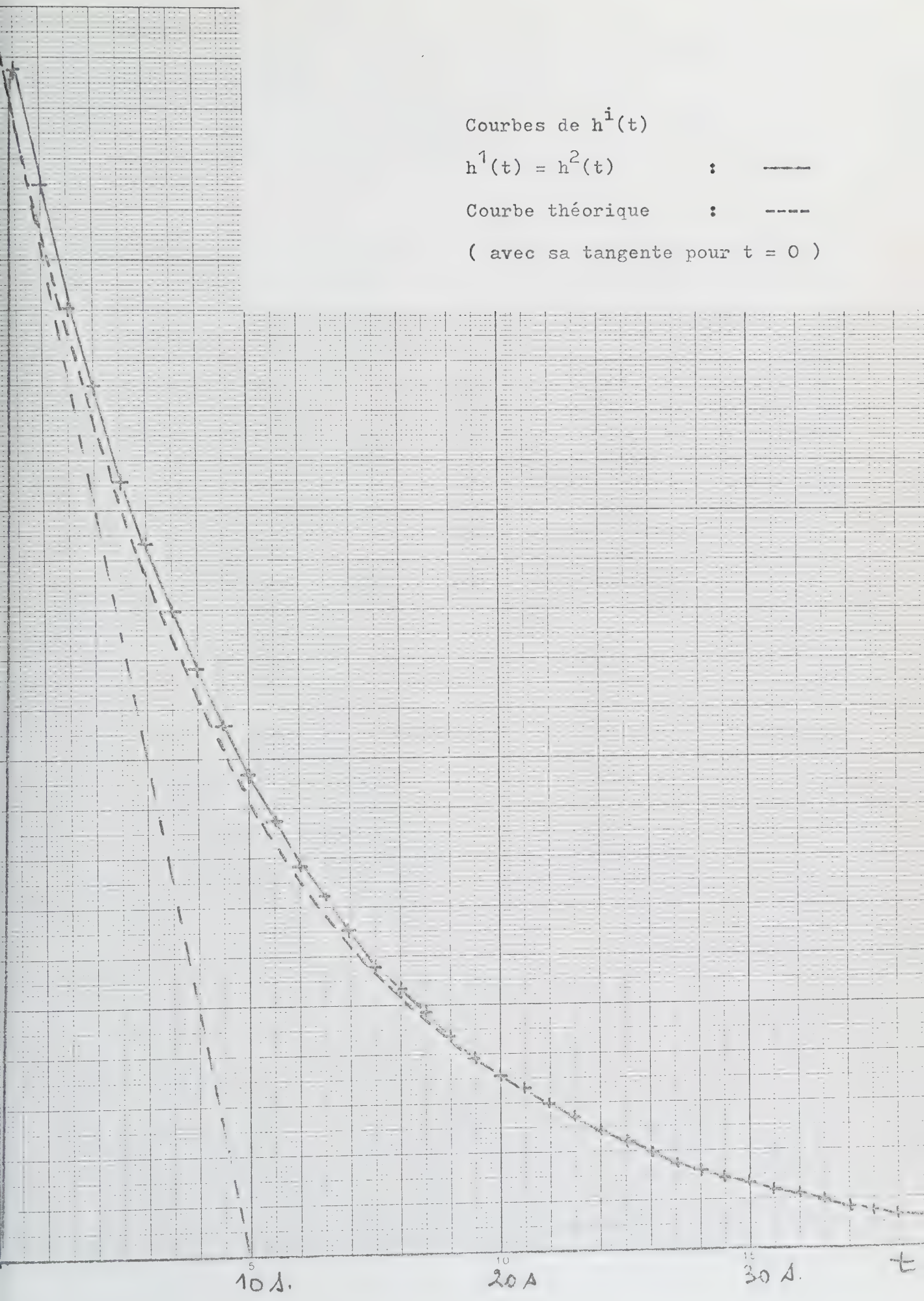
Le calcul de la dernière valeur de h^1 et de h^2 donne lieu à une erreur importante , quelque soit m .

Courbes de $h^i(t)$

$h^1(t) = h^2(t)$: ——

Courbe théorique : ----

(avec sa tangente pour t = 0)



Vérification des résultats précédents : reconvolution

s(t) est la sortie précédemment donnée

$sc(t) = h^1 * e^1 + h^2 * e^2$

S =

0.0000000E 00
0.9516258E-01
0.1812692E 00
0.2591617E 00
0.3296799E 00
0.3934693E 00
0.4511983E 00
0.5034147E 00
0.5506711E 00
0.5934304E 00
0.6321206E 00
0.6671289E 00
0.6988058E 00
0.7274682E 00
0.7534030E 00
0.7768698E 00
0.7981035E 00
0.8173165E 00
0.8347011E 00
0.8504314E 00
0.8646647E 00
0.8775435E 00
0.8891968E 00
0.8997411E 00
0.9092820E 00
0.9179151E 00
0.9257265E 00
0.9327945E 00
0.9391900E 00
0.9449768E 00
0.9502129E 00
0.9549508E 00
0.9592378E 00
0.9631168E 00
0.9666267E 00
0.9698026E 00
0.9726762E 00
0.9752764E 00
0.9776293E 00
0.9797581E 00

Sc =

-0.2126384E-05
0.9515604E-01
0.1812761E 00
0.2591730E 00
0.3297010E 00
0.3934696E 00
0.4511844E 00
0.5034152E 00
0.5506659E 00
0.5934203E 00
0.6321154E 00
0.6671320E 00
0.6988104E 00
0.7274669E 00
0.7533954E 00
0.7768620E 00
0.7981016E 00
0.8173217E 00
0.8347088E 00
0.8504353E 00
0.8646626E 00
0.8775389E 00
0.8891958E 00
0.8997453E 00
0.9092860E 00
0.9179123E 00
0.9257184E 00
0.9327901E 00
0.9391928E 00
0.9449760E 00
0.9501986E 00
0.9549350E 00
0.9592381E 00
0.9631146E 00
0.9666041E 00
0.9698060E 00
0.9726618E 00
0.9752705E 00
0.9776222E 00
0.9839999E 00

La précision de cette méthode est donc bonne .

CHAPITRE 3

EMPLOI DE DIVERSES TECHNIQUES DE CORRELATION

1 - Cas d'un système linéaire monovariable .

1 1 - Théorème de Wiener et Khintchine .

Soit un système linéaire d'entrée x(t) et de sortie y(t) . Si x(t) est une variable aléatoire , stationnaire , les fonctions d'auto-corrélation $\varphi_{xx}(t)$ et d'intercorrélation $\varphi_{xy}(t)$ sont liées par la même relation linéaire que x(t) et y(t) . (Voir les références bibliographiques [10] , [11] , [12]) .

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

$$\varphi_{xy}(t) = h(t) * \varphi_{xx}(t)$$

h(t) étant la réponse impulsionnelle du système .

1 2 - Cas de signaux déterministes .

Si les signaux x(t) et y(t) sont des signaux quelconques , on peut s'inspirer du théorème précédent ,retrouver un résultat identique au théorème cité , ceci à condition de faire certaines hypothèses sur les signaux x(t) et y(t) .

Je suppose que l'on dispose d'un enregistrement "total" de x(t) et de y(t) :

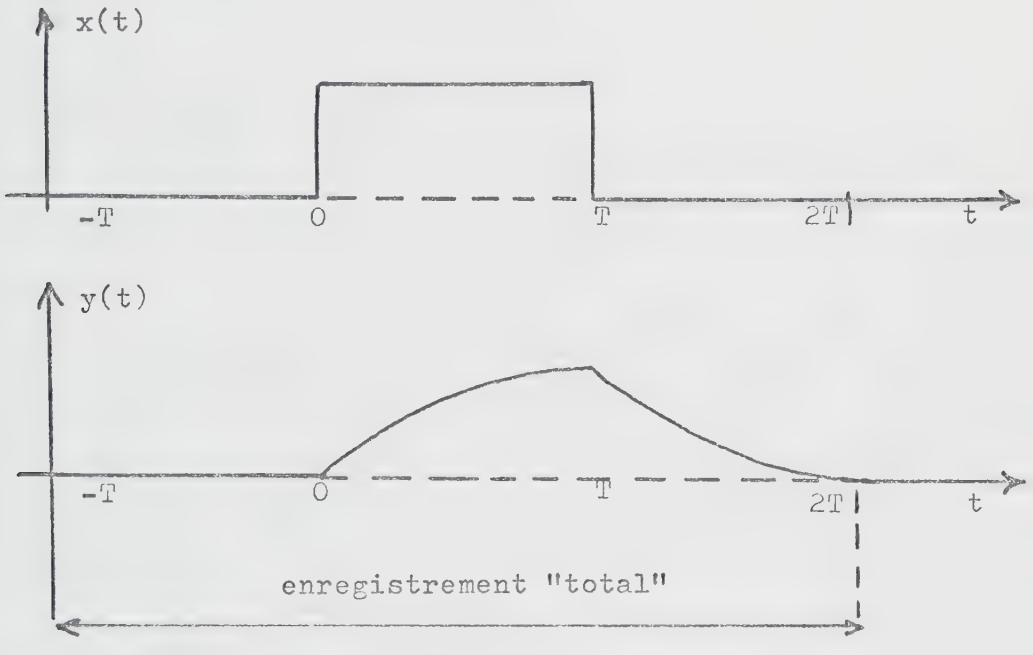
1) les conditions initiales sont nulles pour les variables

au temps t = 0 .

2) le signal d'entrée revient à zéro au bout d'un temps fini (que l'on notera T) .

3) à partir du temps t = 2T , la valeur du signal de sortie peut être considérée comme nulle .

Exemple d'enregistrement "total" :



On peut, en général, se ramener à une configuration de ce type .

On peut poser :

$$\begin{cases} \varphi_{xy}(\tau) = \int_0^T x(t)\, y(t+\tau)\, dt \\ \varphi_{xx}(\tau) = \int_0^T x(t)\, x(t+\tau)\, dt \end{cases}$$

avec $|\tau| < T$

Les propriétés de ces fonctions sont différentes de celles des fonctions de corrélation classiques . En particulier le phénomène n'étant pas stationnaire , on a :

$$\varphi_{yx}(-\tau) \neq \varphi_{xy}(\tau)$$

En effet :

$$\varphi_{yx}(-\tau) = \int_0^T y(t)\, x(t-\tau)\, dt$$

$$\varphi_{xy}(\tau) = \int_0^T x(t)\, y(t+\tau)\, dt$$

De même :

$$\varphi_{xy}(-\tau) \neq \varphi_{yx}(\tau)$$

Néanmoins , on peut trouver une forme analogue au théorème de Wiener et Khintchine .

Calculons $\varphi_{xy}(\tau)$:

$$\varphi_{xy}(\tau) = \int_0^T x(t)\, y(t+\tau)\, dt$$

avec $y(t) = \int_0^t h(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau$

Par changement de variable , en posant $t-\tau = u$, et avec l'hypothèse $x(t) = 0$ pour $t < 0$, on a :

$$y(t) = \int_0^t h(u)\, x(t-u)\, du = \int_0^\infty h(u)\, x(t-u)\, du$$

Donc :

$$\varphi_{xy}(\tau) = \int_0^T x(t)\left[\int_0^\infty h(u)\, x(t+\tau-u)\, du\right] dt$$

$$\varphi_{xy}(\tau) = \int_0^\infty \left[\int_0^T x(t)\, x(t+\tau-u)\, dt\right] h(u) \cdot du$$

D'où:

$$\boxed{\varphi_{xy}(\tau) = \int_0^\infty h(u)\, \varphi_{xx}(\tau-u)\, du}$$

Cette formule n'est valable , pour un système déterministe, que dans les hypothèses d'un enregistrement "total" de x(t) et y(t) tel qu'il a été défini précédemment .

Un exemple de calcul des fonctions $\varphi_{xy}(t)$ et $\varphi_{xx}(t)$ est donné , pour un système du premier ordre, soumis à une entrée en créneau (voir page 26) . La valeur de la constante de temps est de 5 secondes et la durée de l'échantillon T = 20 secondes .

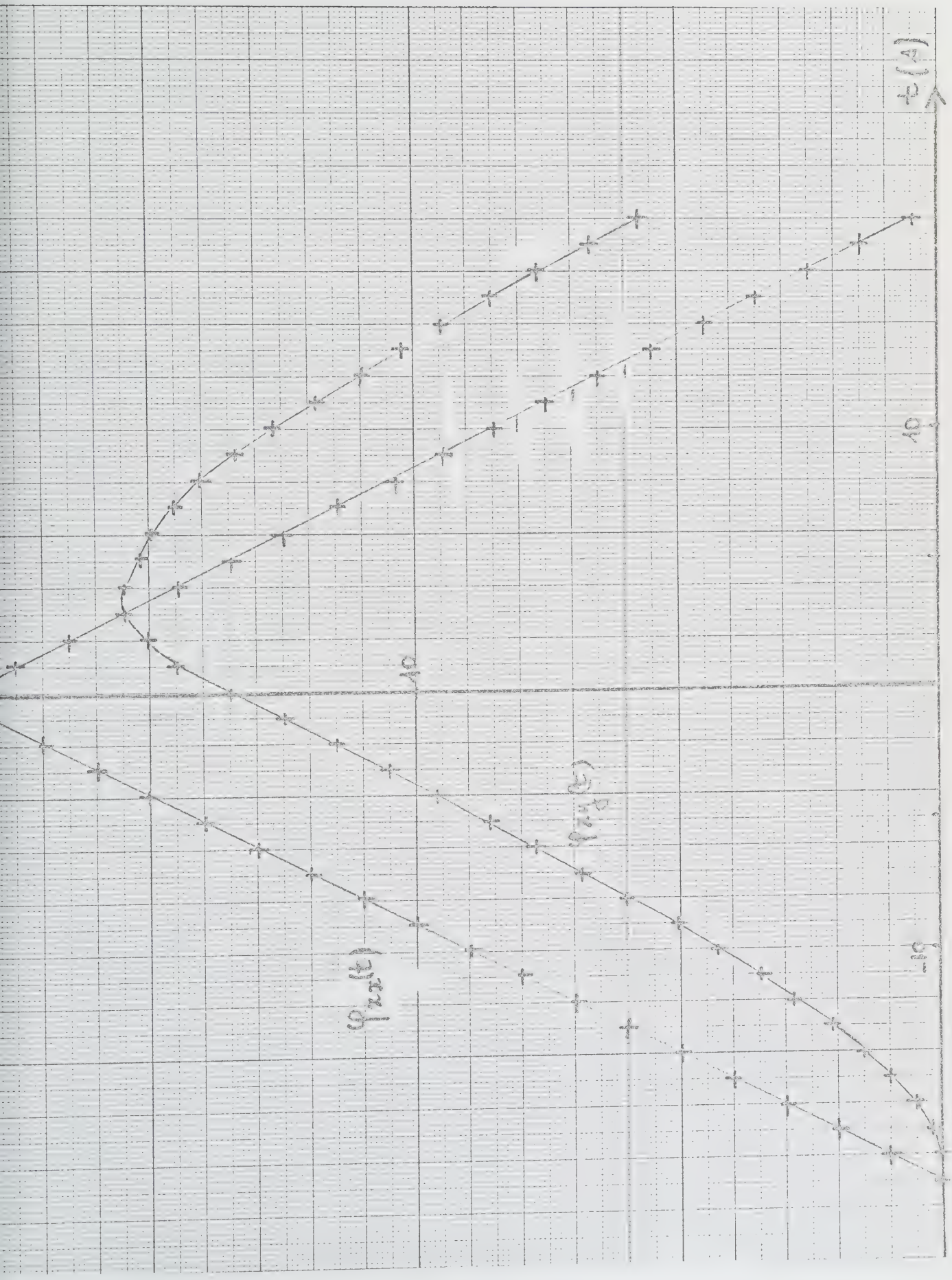
2 - Cas d'un système linéaire à plusieurs entrées .

Pour un système multivariable à une sortie y(t) et à r entrées $x^i(t)$, avec $i \in [1,r]$, on peut écrire , en notant $h^i(t)$ la réponse impulsionnelle correspondant à y(t) et $x^i(t)$:

$$y(t) = \sum_{p=1}^{r} \int_0^\infty h^p(u)\, x^p(t-u)\, du$$

Calculons $\varphi_{x^i y}(\tau)$:

$$\varphi_{x^i y}(\tau) = \int_0^\infty x^i(t)\left[\sum_{p=1}^{r} \int_0^\infty h^p(u)\, x^p(t+\tau-u)\, du\right] dt$$


PAPIERS LANSTON FRANCE

$$\varphi_{x i_y}(\tau) = \sum_{p=1}^{r} \int_0^{\infty} h^p(u)\ \varphi_{x i_{xp}}(\tau - u)\ du$$

D'où le résultat :

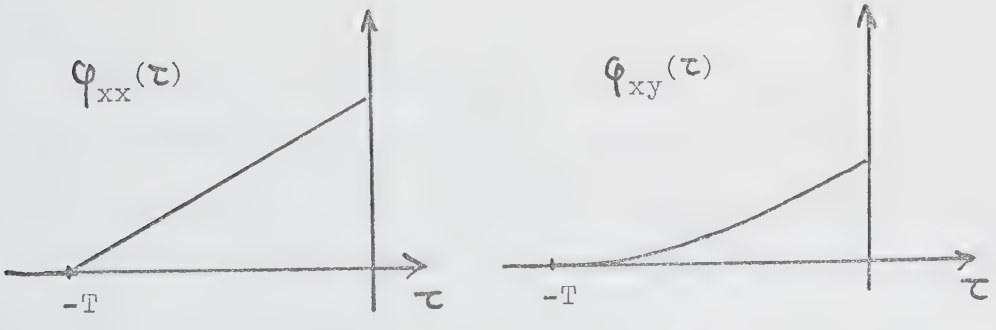
$$\boxed{\varphi_{x i_y}(\tau) = \sum_{p=1}^{r} h^p * \varphi_{x i_{xp}}}$$

3 - Pratique du calcul de la réponse impulsionnelle à partir des fonctions de corrélation

J'ai tenté beaucoup d'essais et j'ai obtenu des résultats très divers . On peut les regrouper en plusieurs groupes différents .

3 1 - Déconvolution simple sur la "partie gauche" des fonctions de corrélation , pour un système monovariable .

On peut être tenté de calculer la réponse impulsionnelle à partir des courbes $\varphi_{xx}(\tau)$ et $\varphi_{xy}(\tau)$, situées sur le demi-plan gauche ($\tau < 0$) .



Les fonctions de corrélation étant très lisses , la déconvolution peut se faire de proche en proche , à partir du premier point :

Si ΔT est le pas du calcul :

$$h(0) = 2 \cdot \frac{\varphi_{xy}(-T+\Delta T)}{\varphi_{xx}(-T+\Delta T)}$$

$$h(\Delta T) = \left[\varphi_{xy}(-T+2\Delta T) - \frac{h(0) \cdot \varphi_{xx}(-T+2\Delta T)}{2} \right] \Big/ \varphi_{xx}(-T+\Delta T)$$

$$h(2\Delta T) = \left[\varphi_{xy}(-T+3\Delta T) - \frac{h(0) \cdot \varphi_{xx}(-T+3\Delta T)}{2} - h(\Delta T) \cdot \varphi_{xx}(-T+2\Delta T) \right] \Big/ \varphi_{xx}(-T+\Delta T)$$

$$h(3\Delta T) = \left[\varphi_{xy}(-T+4\Delta T) - \frac{h(0)\varphi_{xx}(-T+4\Delta T)}{2} - h(\Delta T) \cdot \varphi_{xx}(-T+3\Delta T) - h(2\Delta T) \cdot \varphi_{xx}(-T+2\Delta T) \right] \Big/ \varphi_{xx}(-T+\Delta T)$$

Cette méthode a donné de bons résultats , comme en témoignent les résultats donnés ici . La méthode a , de plus , l'avantage de ne pas faire intervenir les enregistrements des variables au-delà de t = T .

Exemple .

Cas d'un système du premier ordre , de constante de temps égale à 5 secondes , soumis à une entrée en créneau . Le pas d'échantillonnage est de 1 seconde (cette valeur est importante vis à vis de la constante de temps ; ce qui est un cas défavorable quant à la précision des calculs) .

Le tableau ci-après donne pour chaque valeur de t :

h(t) : réponse impulsionnelle calculée ,

h'(t) : réponse impulsionnelle théorique .

t	h(t)	h'(t)
0	0.07328	0.2
1	0.16405	0.16374
2	0.13432	0.13406
3	0.10994	0.10976
4	0.09006	0.08986
5	0.07370	0.07357
6	0.06035	0.06023
7	0.04942	0.04931
8	0.04045	0.04037
9	0.03312	0.03305
10	0.02711	0.02706
11	0.02204	0.02216
12	0.01817	0.01814
13	0.01488	0.01485
14	0.01272	0.01216
15	0.00995	0.00995
16	0.00823	0.00815
17	0.00647	0.00667
18	0.00610	0.00546

3 2 - Déconvolution simple sur la "partie gauche" des fonctions de corrélation , pour un système multivariable .

On peut tenter le même raisonnement pour un système à r entrées . La seule différence est que pour chaque valeur de t , on doit résoudre un système linéaire à r lignes et (r + 1) colonnes .

Pour le calcul de h(0) , pour les différentes réponses impulsionnelles ($h^1(0)$, $h^2(0)$) , et dans le cas de deux variables , on peut écrire :

$$\varphi_{x^1 y}(-T+\Delta T) = \frac{h^1(0)}{2}\varphi_{x^1 x^1}(-T+\Delta T) + \frac{h^2(0)}{2}\varphi_{x^1 x^2}(-T+\Delta T)$$

$$\varphi_{x^2 y}(-T+\Delta T) = \frac{h^1(0)}{2}\varphi_{x^2 x^1}(-T+\Delta T) + \frac{h^2(0)}{2}\varphi_{x^2 x^2}(-T+\Delta T)$$

Pour le calcul de h(ΔT) :

$$\varphi_{x^1 y}(-T+2\Delta T) - \frac{h^1(0)}{2}\varphi_{x^1 x^1}(-T+2\Delta T) - \frac{h^2(0)}{2}\varphi_{x^1 x^2}(-T+2\Delta T)$$

$$= h^1(\Delta T).\varphi_{x^1 x^1}(-T+\Delta T) + h^2(\Delta T).\varphi_{x^1 x^2}(-T+\Delta T)$$

$$\varphi_{x^2 y}(-T+2\Delta T) - \frac{h^1(0)}{2}\varphi_{x^2 x^1}(-T+2\Delta T) - \frac{h^2(0)}{2}\varphi_{x^2 x^2}(-T+2\Delta T)$$

$$= h^1(\Delta T).\varphi_{x^2 x^1}(-T+2\Delta T) + h^2(\Delta T)\varphi_{x^2 x^2}(-T+\Delta T)$$

Ainsi de suite pour les autres valeurs des réponses impulsionnelles .

L'expérience a montré que les résultats étaient mauvais . En effet , le calcul de la valeur $h(t_p)$, t_p étant un instant quelconque , dépend de tous les calculs de $h(t_i)$ avec $i < p$. L'importance des calculs des premières valeurs est donc très grande. Or , pour ces premières valeurs , les fonctions de corrélation sont relativement imprécises , car leur calcul fait intervenir un nombre restreint de termes .

J'ai tenté différentes interpolations (Aïken - Lagrange) pourles calculs des premières valeurs , mais ceci sans résultat appréciable .

Ce programme a donc été abandonné .

3 3 - Déconvolution à partir de la "partie de droite" des fonctions d'intercorrélation , pour un système monovariable .

On peut écrire :

$$\varphi_{xy}(\theta) = \int_0^{\infty} \varphi_{xx}(\theta - t)\, h(t)\, dt$$

En discrétisant le problème , en adoptant la méthode des trapèzes pour l'intégration , on peut calculer les valeurs h(t) à partir du système suivant :

$$\Delta T.\, \varphi_{xy}(0) = h(0)\frac{\varphi_{xx}(0)}{2} + h(\Delta t)\,.\varphi_{xx}(-\Delta t) + h(2\Delta T).\varphi_{xx}(-2\,\Delta T)+\ldots$$

$$\Delta T.\, \varphi_{xy}(\Delta T) = h(0)\frac{\varphi_{xx}(\Delta T)}{2} + h(\Delta t)\,\varphi_{xx}(0) + h(2\,\Delta t)\,\varphi_{xx}(-\Delta T)+\ldots$$

$$\Delta T.\varphi_{xy}(2\Delta T) = h(0)\ \frac{\varphi_{xx}(2\Delta T)}{2} + h(\Delta T)\ \varphi_{xx}(\Delta T) + h(2\Delta T)\ \varphi_{xx}(0) + \ldots$$

Et ainsi de suite ...

Le nombre de termes (m) à considérer sur chaque ligne doit être suffisant pour que $h(m.\Delta T)$ puisse être considéré comme nul , si la réponse est asymptotiquement stable . Il faut bien remarquer ici , que les variables x(t) et y(t) n'étant pas stationnaires , on a :

$$\varphi_{xy}(\theta) \neq \varphi_{yx}(-\theta)$$

Les résultats de cette méthode ont été bons , malgré la résolution d'un système de grandes dimensions . Il faut signaler que cette méthode ne s'applique pas à des réponses impulsionnelles ne tendant pas vers zéro pour t tendant vers l'infini .

Exemple .

Cas d'un système du premier ordre , de constante de temps égale à 5 secondes , soumis à une entrée en créneau . Le pas d'échantillonnage est de 1 seconde (cette valeur est importante vis à vis de la constante de temps ; ce qui est un cas défavorable quant à la précision des calculs) .

Le tableau ci-après donne pour chaque valeur de t:

h(t) : réponse impulsionnelle calculée ,

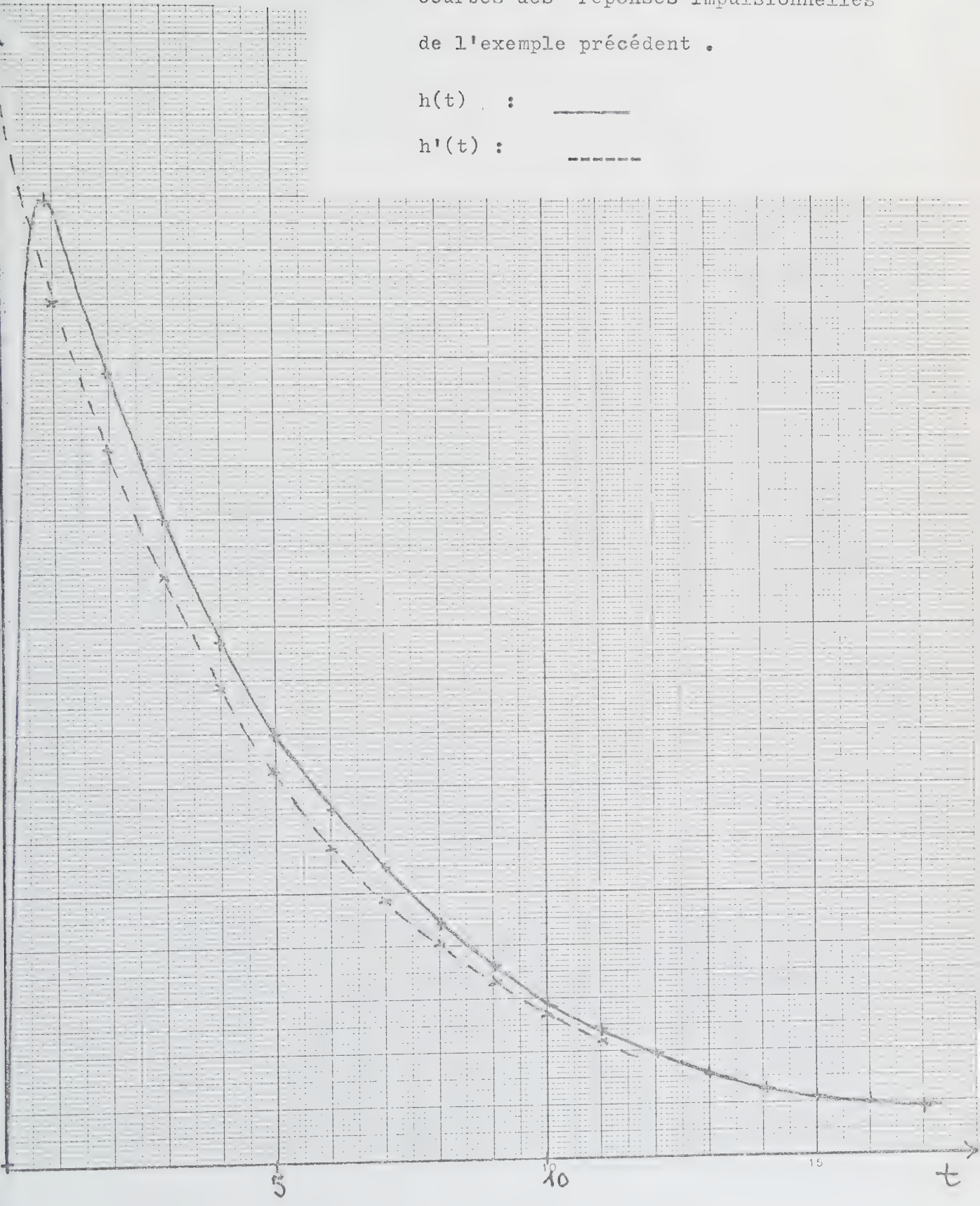
h'(t) : réponse impulsionnelle théorique .

t	h(t)	h'(t)
0	0.000003	0.2
1	0.181264	0.16374
2	0.148410	0.13406
3	0.121509	0.10976
4	0.099483	0.08986
5	0.081450	0.07357
6	0.066684	0.06023
7	0.054596	0.04931
8	0.044700	0.04037
9	0.036598	0.03305
10	0.029962	0.02706
11	0.024533	0.02216
12	0.020084	0.01814
13	0.016444	0.01483
14	0.013462	0.01216
15	0.011023	0.00995
16	0.009027	0.00815
17	0.007386	0.00667
18	0.006050	0.00546

Courbes des réponses impulsionnelles de l'exemple précédent .

h(t) : ———

h'(t) : – – – –



3 4 - Application de la méthode précédente à un système multivariable .

Nous avons vu que cette méthode était relativement bonne mais que sa précision était inférieure à celle de la méthode exposée au § 3 1 . Le seul intérêt est que le calcul des valeurs de la réponse h(t) pour $t > t_p$, ne dépend pas directement des valeurs h(t) avec $t < t_p$.

Ceci devait être favorable au calcul des réponses d'un système multivariable . Mais les résultats obtenus ont été décevants et cette méthode a été abandonnée dans le cas d'un système multivariable .

3 5 - Méthode utilisant les moindres carrés .

Puisque φ_{xy} et φ_{xx} sont liées par la même relation que y et x , on peut appliquer la formule trouvée au chapitre 2 , c'est à dire :

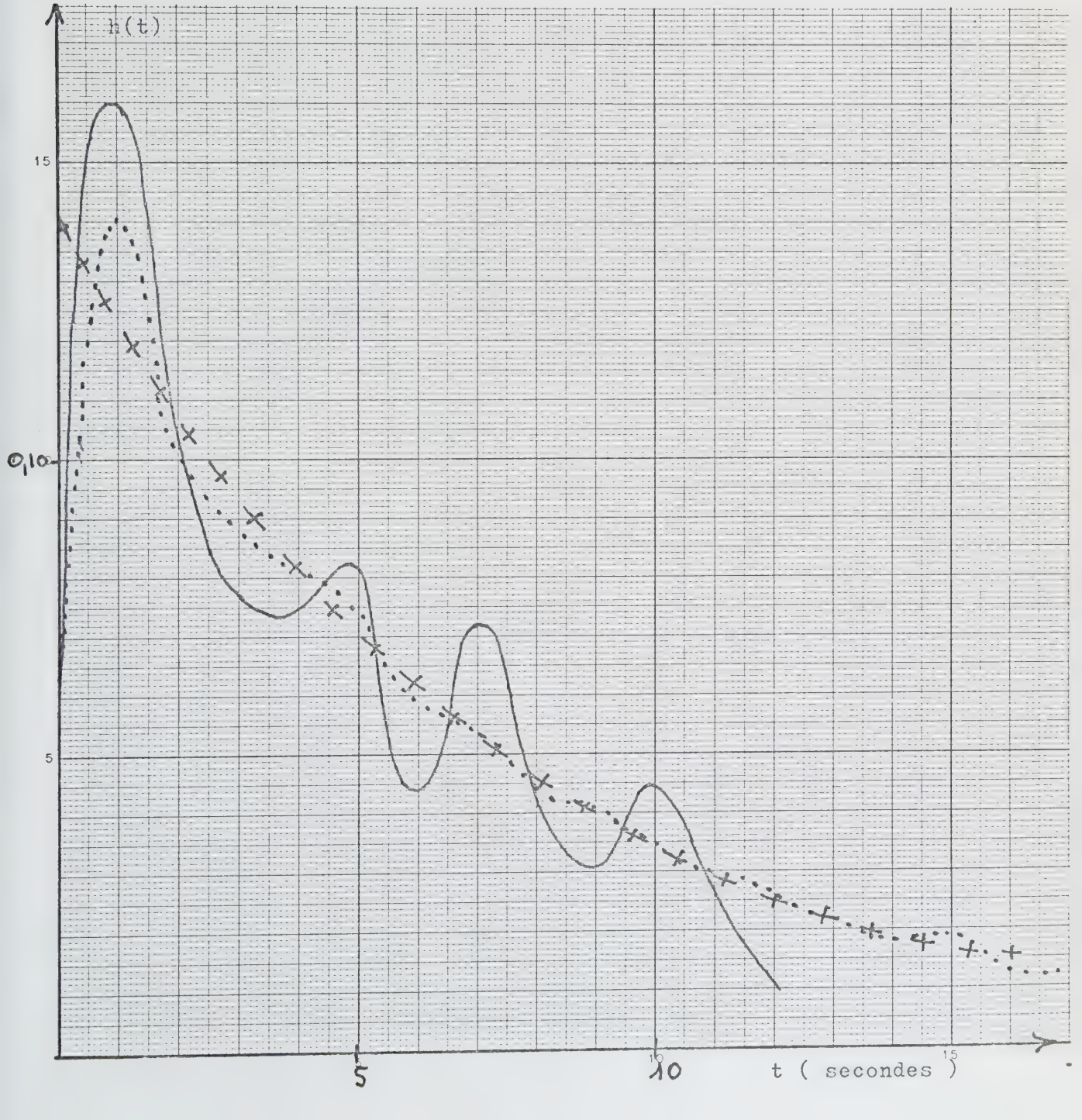
$$\underline{h} = \frac{1}{\Delta t} \left(E^T . E \right)^{-1} . E^T . \underline{S}$$

Dans cette formule , la matrice E concerne les valeurs de la fonction d'auto-corrélation et $\underline{S}$ concerne les valeurs de la fonction d'intercorrélation . Les résultats sont intéressants à montrer .

L'exemple est relatif à un système du premier ordre , soumis à un créneau ; la constante de temps est de 7 secondes . Les deux courbes (page 36) montrent le même calcul effectué , soit en simple précision , soit en double précision . Le tracé en croix donne la valeur théorique de la réponse .

Réponse impulsionnelle d'un même système du premier ordre :

- Calcul théorique : +++++
- Calcul en simple précision : ———
- Calcul en double précision : .....

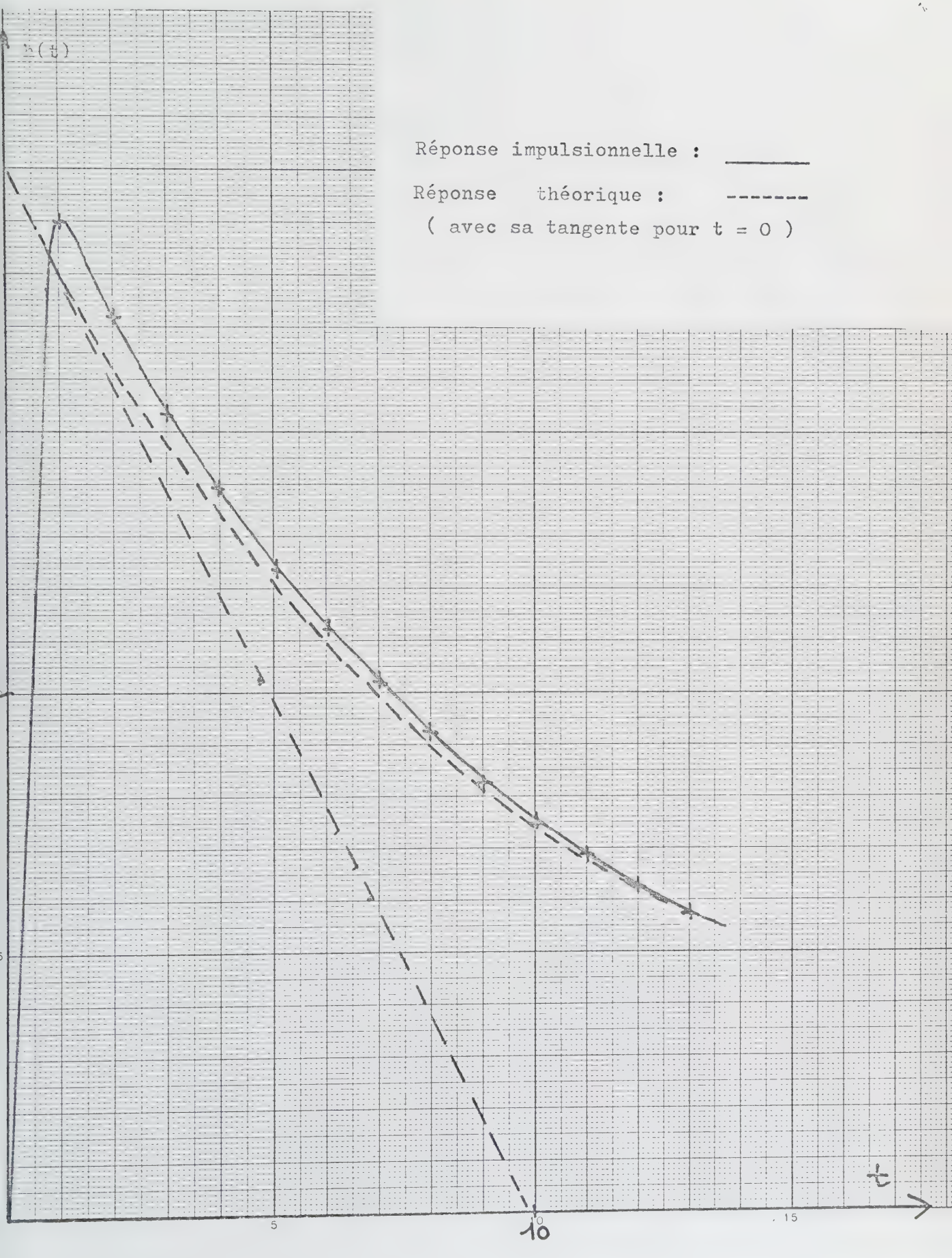


Cet exemple nous a conduit à modifier nos calculs , d'autant plus que pour un système multivariable , les résultats devenaient absurdes .

Nous avons donc appliqué aux fonctions d'intercorrélation et d'autocorrélation une déconvolution numérique , avec minimisation au sens des moindres carrés , cette minimisation se faisant par la méthode des gradients conjugués (voir chapître 7) .

Cette méthode donne de bons résultats dans le cas d'un système monovariable . L'exemple donné page 38 , concerne un système du premier ordre , de constante de temps égale à 10 secondes soumis à une entrée en créneau . La méthode est aussi bonne dans le cas d'un système multivariable . L'exemple donné page 39 , concerne deux transmittances du premier ordre , de constante de temps égale à 10 secondes , soumis à une entrée en créneau .

Nous avons , donc , adopté cette méthode .


h(t)
Réponse impulsionnelle : _____
Réponse théorique : -------
(avec sa tangente pour t = 0)
5
10
15
t

Données : $s(t) = (1 - e^{-t/10}) u(t)$

$e^1(t) = e^2(t) = u(t)$

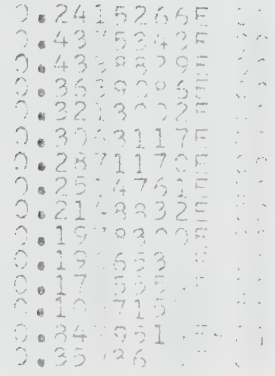
N = 20 (20 points)

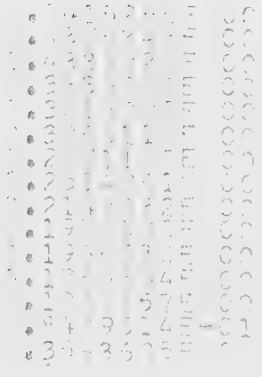
m = 15

pas du calcul : 0.1

Résultats prévisibles : $h^1(t) = h^2(t) = \frac{1}{2} e^{-t/10}$

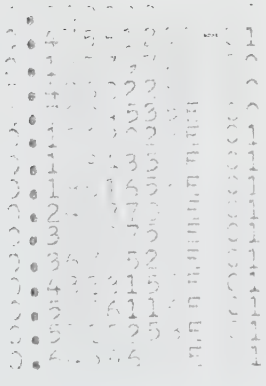
Résultats calculés :

$\underline{h}^1 =$ 

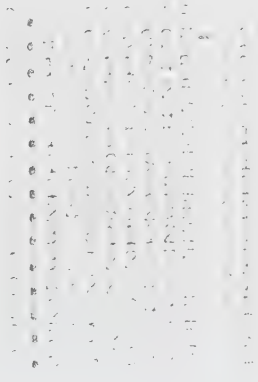
$\underline{h}^2 =$ 

Vérification par convolution des résultats :

s(t)



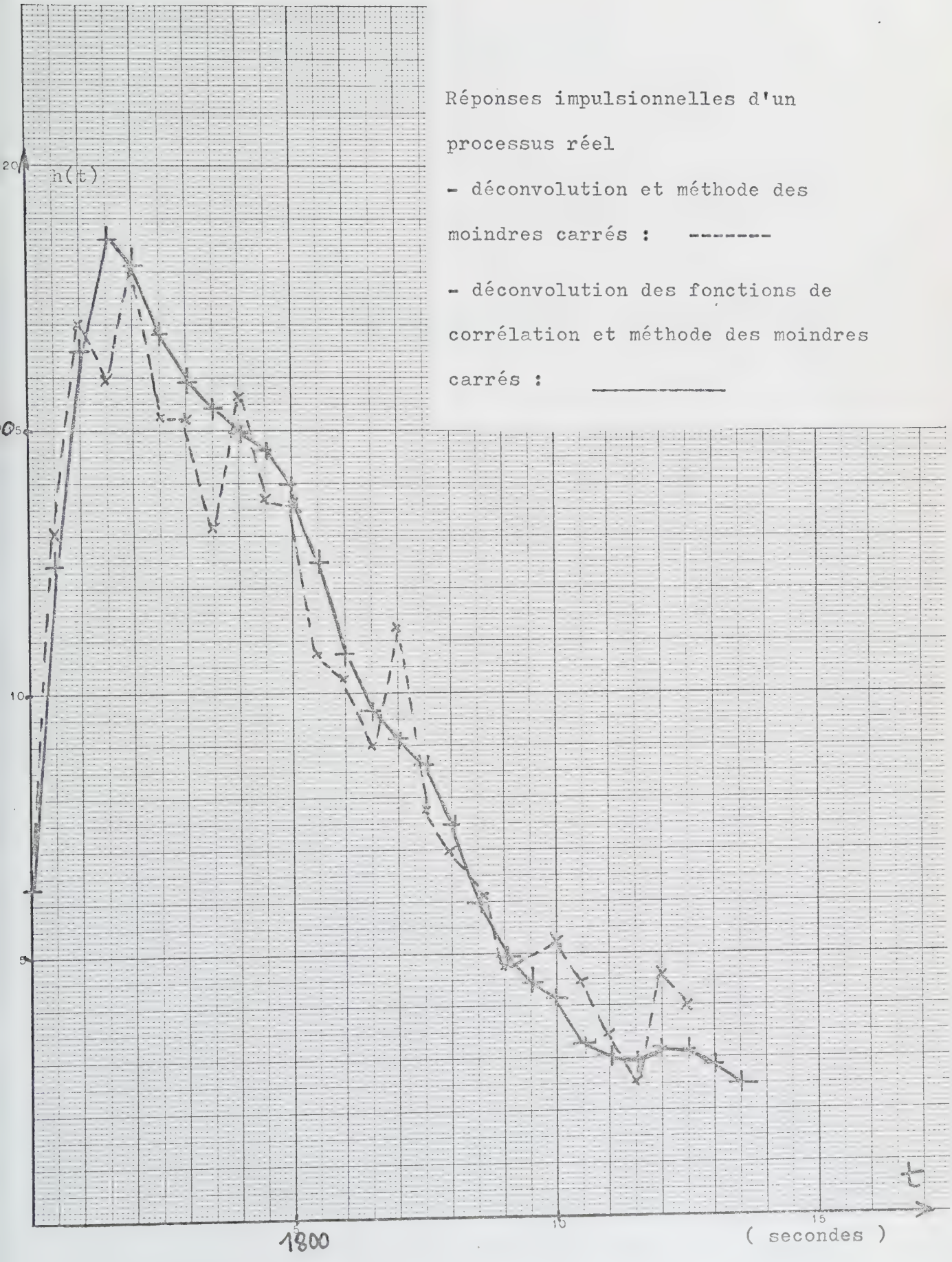
valeurs obtenues



4 - Comparaison de la méthode choisie au chapitre 2 et celle choisie au chapitre 3 .

Sur des exemples mathématiques simulés , les résultats sont très peu différents dans les deux méthodes . Par contre , si l'on considère des enregistrements provenant de processus physiques entachés d'imprécisions de mesures , la différence devient flagrante et impose la deuxième méthode .

Un exemple, choisi parmi les enregistrements du processus de distillation , montre la différence entre les deux méthodes . Il s'agit de la réponse impulsionnelle associée à la valeur du degré alcoolique du distillat et au débit du réfrigérant secondaire .


Réponses impulsionnelles d'un
processus réel
- déconvolution et méthode des
moindres carrés : -------
- déconvolution des fonctions de
corrélation et méthode des moindres
carrés : _____
h(t)
20
10
5
t
15
(secondes)
1800

2 ème partie

CALCUL DU DENOMINATEUR DE LA TRANSMITTANCE

CHAPITRE 4

CALCUL DES TERMES DU DENOMINATEUR

1 - Introduction .

On dispose des valeurs h(t) de la réponse impulsion-nelle pour chaque couple entrée/sortie . Le problème est deve-nu maintenant monovariable . Il s'agit de trouver une transmit-tance H(p) dont la réponse impulsionnelle soit aussi proche que possible de h(t) .

On suppose donc le système monovariable régi par une équation :

$$B_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + B_{n-1} \frac{d^{n-1} s(t)}{dt^{n-1}} + \dots + B_1 \frac{ds(t)}{dt} + s(t) =$$

$$A_m \frac{d^m s(t)}{dt^m} + \dots + A_1 \frac{de(t)}{dt} + A_0 e(t)$$

Les coefficients B_i , A_i , sont inconnus , ainsi que les valeurs m et n . On suppose $m < n$.

La réponse impulsionnelle h(t) vérifie cette équation avec $e(t) = \delta(t)$ (impulsion de DIRAC)

$$B_n \frac{d^n h(t)}{dt^n} + B_{n-1} \frac{d^{n-1} h(t)}{dt^{n-1}} + \dots + B_1 \frac{dh(t)}{dt} + h(t) =$$

(1)

$$A_m \frac{d^m \delta(t)}{dt^m} + \dots + A_1 \frac{d\delta(t)}{dt} + A_0 \delta(t)$$

Cette équation s'écrit , pour $t > 0$:

$$(2) \qquad B_n \frac{d^n h(t)}{dt^n} + \ldots + B_1 \frac{dh}{dt} + h(t) = 0$$

Pour les valeurs de t strictement positives , les coefficients A_i du numérateur n'interviennent pas .

Ceci ne veut pas dire que la réponse impulsionnelle ne contient pas assez d'informations pour représenter complétement le système . Mais , si on regarde l'équation différentielle (1) , on se rend compte que les coefficients A_i n'interviennent théoriquement que pour $t = 0$, puisque ces coefficients sont associés soit à une impulsion de Dirac , soit aux dérivées d'une impulsion de Dirac , (toutes nulles pour $t \neq 0$) .

L'équation (2) , compte tenu de ce qui précède , peut nous permettre de déterminer les coefficients B_i . La perte d'information entre les équations (1) et (2) doit être compensée par de nouveaux éléments . On peut choisir , par exemple , à partir des coefficients B_i, de chercher les coefficients A_i du numérateur , tels que la réponse impulsionnelle calculée à partir des valeurs A_i et B_i soit la plus proche de la réponse impulsionnelle h(t) . Ce problème sera résolu au chapitre 6 .

Il nous faut d'abord calculer les coefficients B_i du dénominateur . On supposera , pour simplifier le problème, que l'ordre n de la transmittance est donné à l'avance . On verra par la suite comment déterminer systématiquement la valeur de l'ordre n de la transmittance .

2 - Choix de la méthode .

La réponse h(t) étant donnée sous forme numérique , les dérivées h'(t) et h"(t) ... sont très difficiles à élaborer et leur calcul numérique conduit à des erreurs . Nous avons donc éliminé les méthodes faisant intervenir des dérivations pour h(t) .

La méthode des fonctions modulatrices , exposée dans l'ouvrage de J. LOEB, [1] , nous a paru convenir pour ce type de calcul .

3 - Les fonctions modulatrices .

Le principe est simple : si la dérivation d'une fonction enregistrée numériquement conduit à des erreurs , l'intégration par contre , donne de bons résultats .

Soient x(t) et y(t) deux enregistrements . On cherche les coefficients constants θ_i de l' équation différentielle liant x(t) et y(t) . Par exemple :

$$\theta_0 x + \theta_1 x' + \ldots + \theta_p x^{[p]} = y$$

On choisit une fonction quelconque $\varphi(t)$, dite fonction modulatrice , nulle ainsi que ses (p-1) premières dérivées , pour t = 0 et t = T (T étant la longueur de l'enregistrement) . On multiplie l'équation par φ , et on intègre de 0 à T .

$$\int_0^T \varphi \theta_0 x \, dt + \int_0^T \varphi \theta_1 x' \, dt + \ldots = \int_0^T \varphi y \, dt$$

Calculons chaque terme : (intégation par parties)

$$\int_0^T \varphi\theta_1 x' \, dt = \theta_1 \left[\varphi x\right]_0^T - \theta_1 \int_0^T \varphi' x \, dt$$

$$\int_0^T \varphi\theta_2 x'' \, dt = \theta_2 \left[\varphi x'\right]_0^T - \theta_2 \left[\varphi' x\right]_0^T + \theta_2 \int_0^T \varphi'' x \, dt$$

Tous les termes entre crochets sont nuls par le choix fait pour la fonction φ .

D'où :

$$\theta_0 \int_0^T \varphi x \, dt - \theta_1 \int_0^T \varphi' x \, dt + \theta_2 \int_0^T \varphi'' x \, dt + \ldots +$$

$$\theta_p (-1)^p \int_0^T \varphi^{(p)} x \, dt = \int_0^T \varphi y \, dt$$

Les dérivations portent maintenant sur les fonctions φ (données mathématiquement) et non sur x et y (enregistrements numériques) On trouve une relation linéaire en θ_0 , θ_1 , ... , θ_p . Il suffit de choisir p autres fonctions (Ψ, η , ...) pour pouvoir déterminer tous les coefficients de l'équation différentielle .

Les fonctions modulatrices ont d'autres applications que je ne décris pas ici (voir référence [1]) .

4 - Cas d'une réponse impulsionnelle .

4 1 - Choix des fonctions modulatrices .

J'ai choisi la forme :

$$\varphi = \sin^k wt$$

Les valeurs k et w étant déterminées pour que φ et ses (n-1) premières dérivées soient nulles pour t = 0 et t = T .

Les fonctions φ se déduisent l'une de l'autre par

variation de w . J'ai choisi de faire varier w en progression arithmétique, de premier terme et de raison égaux à $\frac{2\pi}{T}$.

Dans les premiers programmes , la valeur de k était fonction de l'ordre de la transmittance . On avait :

- ordre 1 : $\varphi = \sin wt$

$-\varphi' = -w \cos wt$

- ordre 2 : $\varphi = \sin^2 wt$

$-\varphi' = -2w \sin wt \cos wt$

$\varphi'' = 2w^2 (+ 2\cos^2 wt - 1)$

- ordre 3 : $\varphi = \sin^3 wt$

$-\varphi' = -3w \sin^2 wt \cos wt$

$\varphi'' = 6w^2 \sin wt \cos^2 wt - 3w^2 \sin^3 wt$

$-\varphi''' = -w^3 \cos wt (27 \cos^2 wt - 21)$

- ordre 4 : $\varphi = \sin^4 wt$

$-\varphi' = -4w \sin^3 wt \cos wt$

$\varphi'' = w^2 \sin^2 wt(16 \cos^2 wt - 4)$

$-\varphi''' = -w^3 \sin wt \cos wt (24-64 \sin^2 wt)$

$\varphi'''' = w^4 \left[(256 \sin^2 wt - 240) \sin^2 wt + 24 + 24 \sin wt \cos wt\right]$

Je me suis limité à l'ordre 4 , mais on peut choisir une valeur élevée de k .

Par exemple , pour un système réel du premier ordre :

$$y + 0,15\, y' = x$$

avec un calcul pour k = 10 (largement supérieur à la valeur strictement nécessaire) , les résultats donnent :

$$B_1 = 0,15000009$$

Ceci m'a amené par la suite à choisir k = 4 pour toutes les transmittances de degré inférieur à 4 .

4 2 - Détermination du degré de la transmittance .

On ne connait pas à priori le degré de la transmittance .

Pour le déterminer , le programme procède ainsi :

- Il part d'un modèle du premier ordre et il calcule tous les termes intégrés ; il résoud le système linéaire par le programme RESO, qui est basé sur une triangulation de la matrice, et il donne les valeurs des coefficients B_i .

- Il envisage un modèle du second ordre , et il calcule les termes intégrés ; il vérifie si les valeurs B_i (trouvées pour un premier ordre) et la valeur 0 sont solutions du système linéaire . Si les résultats différent de moins de 5% en erreur relative , le modèle du premier ordre est accepté . Sinon , le modèle est rejeté . Le programme calcule alors les solutions du système (modèle du second ordre) .

- Il envisage un modèle du troisième ordre et ainsi de suite .

5 - Remarque : Utilisation de la réponse indicielle .

Dans le cas de la réponse impulsionnelle h(t) , on peut écrire n équations du type :

$$(-1)^n B_n \int_0^T \varphi^{(n)} \, h \, dt + \ldots - B_1 \int_0^T \varphi' \, h \, dt + \int_0^T \varphi \, h \, dt = 0$$

Quelle que soit la formulation de l'équation , un coefficient B_i devra être pris égal à une constante pour pouvoir résoudre le système . Ici , on a pris implicitement $B_0 = 1$

Ceci privilège une variable , ou une de ces dérivées , et de ce fait , certaines transmittances ne seront pas identifiables .

On peut donc essayer de transformer le système d'équations

pour qu'aucune variable ne soit privilègiée : il suffit de fabriquer à partir de h(t) la réponse indicielle g(t) :

$$g(t) = h(t) * 1$$

On a alors , n+1 coefficients à déterminer , à partir de n+1 équations du type :

$$(-1)^n C_n \int_0^T \varphi^{(n)} g \, dt + \ldots - C_1 \int_0^T \varphi' g \, dt + C_0 \int_0^T \varphi g \, dt = 1$$

Les coefficients C_0 à C_n sont les coefficients du dénominateur cherché .

La détermination des fonctions modulatrices et le calcul de l'ordre du modèle seront effectués comme indiqué en début de chapitre . Comme il y a un coefficient de plus à déterminer , il faut utiliser une fonction modulatrice de plus .

De nombreux exemples ont été tentés . On verra les limites de cette méthode au chapitre suivant , et la manière avec laquelle j'ai pu y remédier .

CHAPITRE 5

PRINCIPE DES FONCTIONS AUTOMODULATRICES POUR UN SYSTEME MONOVARIABLE

1 - Introduction .

La technique des fonctions modulatrices a été exposée dans le chapitre : " Calcul des termes du dénominateur " .

Ces fonctions modulatrices étaient choisies arbitrairement au départ . Comme elles étaient employées pour identifier des réponses impulsionnelles , je n'ai pas eu de difficultés majeures , et j'ai pu choisir une forme :

$$\varphi = \sin^k wt$$

Ceci est dû à la forme particulière des réponses impulsionnelles et à leur extinction rapide . Néanmoins , dans certains cas , les résultats étaient peu satisfaisants .

Exemple : Cas d'un intégrateur pur -

pour un modèle du premier ordre , avec une fonction modulatrice $\varphi = \sin wt$

	valeurs calculées	valeurs exactes
coefficient constant	$0{,}72\ 10^{-7}$	0
coefficient de p	$0{,}9999\ 10^{-3}$	10^{-3}

Si le modèle est d'ordre 2 , et la fonction modulatrice $\varphi = \sin^2 wt$, les résultats deviennent erronés .

	valeurs calculées	valeurs exactes
coefficient constant	$0,47\ 10^{-2}$	0
coefficient de p	$-\ 0,13\ 10^{-2}$	$+\ 10^{-3}$
coefficient de p^2	$0,75\ 10^{-4}$	0

Ces résultats erronés , viennent du fait que dans la matrice des termes intégrés du type $\int_0^T \varphi^{(n)}\ y dt$, beaucoup de termes sont sensiblement égaux . L'inversion de la matrice , même en double précision , donne alors des erreurs .

Si on utilise les fonctions modulatrices pour une identification à partir d'un enregistrement de la sortie et de l'entrée correspondante , il s'avère judicieux de lier la structure des fonctions modulatrices à la nature des enregistrements considérés .

J'appellerai de telles fonctions : "automodulatrices" .

2 - Structure des fonctions automodulatrices

J'ai choisi une structure polynomiale , qui donne des dérivations numériques très aisées . Si n est l'ordre maximum des dérivations de l'équation différentielle , la structure est du type :

$$\varphi = t^n\ (\ T - t\ )^n\ .\ P\ (\ t\ )$$

P(t) est un polynôme en t . T est la longueur de l'échantillon . La partie $F = t^n\ (\ T - t\ )^n$ assure la nullité des (n - 1) premières dérivées de φ pour t = 0 et t = T . Le fait de multiplier F par P(t) n'affecte pas cette propriété :

$$\varphi = F(t)\ .\ P(t)$$

$$\varphi^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} C_k^j \cdot F^{(j)} \cdot P^{(k-j)}$$

La dérivée $\varphi^{(k)}$ est une combinaison des dérivées $F^{(j)}$, j variant de 0 à k . Les fonctions F étant des fonctions modulatrices , la fonction φ est aussi modulatrice .

3 - Choix de la fonction P(t) .

Je choisis le polynôme P(t) de telle manière à ce qu'il ne reste sur chaque ligne qu'un seul terme intégré non nul . Voyons-le sur un exemple :

$$ay'' + by' + cy = x + ex'$$

On met cette équation sous la forme :

$$ay'' + by' + cy - ex' = x$$

On a , après multiplication par φ et intégration de 0 à T :

$$(1) \quad a\int_0^T \varphi''y\,dt - b\int_0^T \varphi'y\,dt + c\int_0^T \varphi y\,dt + e\int_0^T \varphi'x\,dt = \int_0^T \varphi x\,dt$$

Pour la première fonction automodulatrice , on choisit P(t) qui satisfait le système d'équations :

$$(2) \quad \begin{cases} \int_0^T \varphi'' y\,dt = 1 \\ -\int_0^T \varphi' y\,dt = 0 \\ \int_0^T \varphi y\,dt = 0 \\ \int_0^T \varphi' x\,dt = 0 \end{cases}$$

Ceci permet de déterminer a :

$$a = \frac{\int_0^T x\varphi \, dt}{\int_0^T \varphi'' y \, dt} = \int_0^T x\varphi \, dt$$

Pour la deuxième fonction modulatrice , on choisit P(t) qui vérifie :

$$(3) \quad \begin{cases} \int_0^T \varphi'' \, y \, dt = 0 \\ -\int_0^T \varphi' \, y \, dt = 1 \\ \int_0^T \varphi \, y \, dt = 0 \\ \int_0^T \varphi' \, x \, dt = 0 \end{cases}$$

Ceci permet de déterminer directement b :

$$b = \frac{\int_0^T x\varphi \, dt}{-\int_0^T \dot{\varphi} \, y dt} = \int_0^T x\varphi \, dt$$

On opère ainsi pour le calcul des autres coefficients .

4 - Calcul du polynôme P(t) .

Rappelons que :

$$\varphi = t^n \, (T - t)^n \, . \, P(t)$$

n est l'ordre maximum des dérivations dans l'équation différentielle .

Le degré du polynôme P(t) est lié au nombre de termes intégrés dans le membre de gauche de l'équation (1) . Dans l'exemple donné , il y a 4 termes intégrés , on peut donc choisir :

$$P(t) = k_1 + k_2 \, t + k_3 \, t^2 + k_4 \, t^3$$

Ces quatre coefficients seront déterminés par la résolution du système (2) .Pour la deuxième fonction automodulatrice ,

les quatre coefficients seront déterminés par la résolution du système (3) ,et ainsi de suite .

Pour la présentation des calculs , j'appelle :

$$\varphi_1 = t^n (T - t)^n$$
$$\varphi_2 = t^n (T - t)^n . t$$
$$\varphi_p = t^n (T - t)^n . t^{p-1}$$

Donc :

$$\varphi = k_1 \varphi_1 + k_2 \varphi_2 + k_3 \varphi_3 + k_4 \varphi_4$$

D'autre part , par dérivation :

$$\varphi^{(k)} = k_1 \varphi_1^{(k)} + k_2 \varphi_2^{(k)} + k_3 \varphi_3^{(k)} + k_4 \varphi_4^{(k)}$$

Avec ces notations , le système d'équations (2) s'écrit :

$$\begin{cases} k_1 \int_0^T \varphi''_1 \cdot y dt + k_2 \int_0^T \varphi''_2 y dt + k_3 \int_0^T \varphi''_3 y dt + k_4 \int_0^T \varphi''_4 y dt = 1 \\ - k_1 \int_0^T \varphi'_1 y dt - k_2 \int_0^T \varphi'_2 y dt - k_3 \int_0^T \varphi'_3 y dt - k_4 \int_0^T \varphi'_4 y dt = 0 \\ k_1 \int_0^T \varphi_1 y dt + k_2 \int_0^T \varphi_2 y dt + k_3 \int_0^T \varphi_3 y dt + k_4 \int_0^T \varphi_4 y dt = 0 \\ k_1 \int_0^T \varphi'_1 x dt + k_2 \int_0^T \varphi'_2 x dt + k_3 \int_0^T \varphi'_3 x dt + k_4 \int_0^T \varphi'_4 x dt = 0 \end{cases}$$

La résolution du système permet de trouver les quatre coefficients k_1 , k_2 , k_3 , k_4 , donc la fonction φ est entièrement déterminée , et on peut calculer a .

De même , le système d'équations (3) permet de déter--miner une deuxième fonction automodulatrice , avec de nouveaux coefficients k_1 , k_2 , k_3 ,k_4 , et ainsi de déter--miner b .

On opèrera de la même façon pour obtenir les autres coefficients de l'équation différentielle .

Dans ces exemples , x(t) est le signal d'entrée et y(t) est le signal de sortie .

Premier exemple

Transmittance du premier ordre : $H(p) = \frac{1}{1 + 10\,p}$

$x(t) = u(t)$

$y(t) = (1 - e^{-t/10}) u(t)$

Nombre de points donnés : 20

Pas de calcul : 1

Résultat : $\frac{1}{0{,}987996 + 10{,}05864\,p}$

Deuxième exemple

Transmittance du premier ordre : $H(p) = \frac{1}{1 + 15\,p}$

$x(t) = u(t)$

$y(t) = (1 - e^{-t/15}) u(t)$

Nombre de points donnés : 20

Pas de calcul : 1

Résultat $\frac{1}{0{,}972421 + 15{,}196035\,p}$

Troisième exemple

Transmittance du premier odre : $H(p) = \frac{1}{1 + 200p}$

$x(t) = u(t)$

$y(t) = (1 - e^{-t/200}) u(t)$

Nombre de points donnés : 20

Pas de calcul : 1

Résultat $\frac{1}{0{,}145492 + 206{,}552780p}$

L'imprécision du résultat est dû au fait que les enregistrements x(t) et y(t) ne décrivent qu'une zone réduite du régime transitoire .

Quatrième exemple

Transmittance d'ordre 0 : $H(p) = 1$

$x(t) = u(t)$

$y(t) = u(t)$

Nombre de points donnés : 20

Pas de calcul : 1

Résultat pour un modèle de premier ordre :

$$\frac{1}{0{,}999999 + 0{,}0000610\ p}$$

Cinquième exemple

Intégrateur : $H(p) = \frac{1}{p}$

$x(t) = u(t)$

$y(t) = t \cdot u(t)$

Nombre de points donnés : 20

Pas de calcul : 1

Résultats pour un modèle :

- du premier ordre $\dfrac{1}{-0{,}045 + 1{,}03497\ p}$
- du deuxième ordre $\dfrac{1}{0{,}00309 + 0{,}98019\ p + 0{,}91688\ p^2}$
- du troisième ordre $\dfrac{1}{0{,}0000069 + 1{,}001595p + 0{,}119p^2 - 0{,}026p^3}$

Certains résultats peuvent surprendre , dans cet exemple . Les erreurs sont dûes à l'imprécision de certains calculs . Néanmoins , si , à partir des transmittances obtenues , on calcule la réponse temporelle correspondant à l'entrée x(t) , les résultats sont proches de l'enregistrement original y(t) , à 5% près .

6 - Application au problème posé : calcul du dénominateur d'une transmittance , à partir de la réponse impulsionnelle .

Comme il a été indiqué au chapitre précédent , on a préféré utiliser la réponse indicielle , obtenue par simple convolution à partir de la réponse impulsionnelle .

Le programme proposé (le listing est donné dans les Annexes) résoud ce problème .

7 - Remarque :

Identification de systèmes multivariables :

La méthode des fonctions automodulatrices , ainsi que celle des fonctions modulatrices , est basée sur l'équation différentielle du système . Cette formulation est peu adaptée aux systèmes multivariables .

Un système multivariable de sortie y(t) et d'entrées $x_1(t)$, $x_2(t)$, ... , $x_n(t)$ sera mis sous la forme :

$$Y(p) = H_1(p) \cdot X_1(p) + H_2(p) \cdot X_2(p) + \ldots + H_n(p) \cdot X_n(p)$$

avec $$H_i(p) = \frac{N_i(p)}{D_i(p)}$$

On voit que l'ordre de l'équation différentielle aug--mente très vite (il est égal à la somme des ordres de chaque dénominateur de transmittance) . Les dérivations d'ordre élevé sur des enregistrements de processus réels perdent , ici , toute signification .

Néanmoins , le programme de fonctions automodulatrices a été conçu pour pouvoir être utilisé pour un système multivaria--ble . Le remplissage de la matrice ϕ est alors plus délicat et

se fait par bandes horizontales (ceci est fait par le sous programme BANDE) .

3ème partie

CALCUL DU NUMERATEUR DE LA TRANSMITTANCE

CHAPITRE 6

CALCUL DES TERMES DU NUMERATEUR .

1- Introduction .

Le problème se pose ainsi : étant donnée une réponse impulsionnelle hr(t) , trouver le numérateur de la fonction H(p) transformée de Laplace de hr(t) , en supposant connu le dénominateur de H(p) .

La méthode proposée consiste à calculer les valeurs A_j des coefficients du numérateur qui minimisent la quantité:

$$\mathcal{E}(A_j) = \int_0^\infty (h-hr)^2 dt$$

hr(t) étant la réponse impulsionnelle donnée , h(t) étant la réponse impulsionnelle calculée , correspondant au dénominateur connu de H(p) et aux valeurs testées A_j du numérateur .

De nombreuses méthodes existent pour trouver le mini--mum d'une fonction de plusieurs variables . Il n'est pas ques--tion ici de les exposer . La méthode des directions conjuguées m'a paru intéressante , car les gradients de la fonction $\mathcal{E}$ à minimiser sont aisément calculables .

2- Calcul des gradients .

Evaluons $\mathcal{E}$ et ses différents gradients :

$$\mathcal{E} = \int_0^\infty (h^2+hr^2-2h.hr)dt$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial A_j} = \frac{\partial}{\partial A_j}\int_0^\infty h^2\, dt - 2\,\frac{\partial}{\partial A_j}\int_0^\infty hr.h.dt$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial A_j} = I_1 + I_2$$

On peut ici utiliser le théorème de Parceval pour calculer chaque intégrale :

Soit à calculer $\int_0^\infty a(t)\, b(t)\, dt$, a et b étant des fonctions quelconques , nulles pour t négatif , bornées quelque soit t , et à décroissance exponentielles vers l'infini .

$$\int_0^\infty a(t)\, b(t)\, dt = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty b(t) \left[\int_{-i\infty}^{i\infty} A(p) \cdot e^{pt} dp \right] dt$$

A(p) étant intégrée sur le contour de Bromwich .

$$\int_0^\infty a(t)\, b(t)\, dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} A(p)\, B(-p)\, dp$$

A(p) , B(p) transformées de Laplace de a(t) et b(t) .

Calculons I_1 :

$$I_1 = \frac{\partial}{\partial A_j} \int_0^\infty h^2 dt = \frac{\partial}{\partial A_j} \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} H(p)\, H(-p)\, dp$$

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\partial}{\partial A_j} \quad (\, H(p)\, H(-p)\,)\, dp$$

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \left(\frac{\partial H(p)}{\partial A_j} \cdot H(-p) \quad + \quad H(p) \quad \frac{\partial H(-p)}{\partial A_j} \quad \right) dp$$

$$\frac{\partial H(p)}{\partial A_j} = \frac{p^j}{D(p)}$$

puisque A_j est le coefficient de p^j dans le numérateur .

D(p) étant le dénominateur de la transmittance .

$$\frac{\partial H(-p)}{\partial A_j} = \frac{\delta . p^j}{D(-p)}$$

δ étant égal à 1 si j est pair , δ étant égal à -1 si j est impair .

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \left[\frac{p^j}{D(p)} . H(-p) + \delta . \frac{p^j}{D(-p)} H(p) \right] dp$$

soit g(t) la transformée inverse de $\frac{p^j}{D(p)}$ et h(t) celle de H(p) ; on a

$$I_1 = \int_0^\infty g(t) . h(t) . dt + \int_0^\infty g(t) . h(t) . dt$$

(en utilisant le théorème de Parceval) . D'où finalement :

$$I_1 = 2 \int_0^\infty g(t) . h(t) . dt$$

Calculons I_2 :

$$I_2 = - 2 \frac{\partial}{\partial A_j} \int_0^\infty hr . h . dt$$

$$I_2 = - 2 \int_0^\infty hr . \frac{\partial h}{\partial A_j} dt$$

car hr est indépendant des A_j .

En utilisant le théorème de Parceval , on a :

$$I_2 = - 2 \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} Hr(-p) . \left(\frac{\partial H(p)}{\partial A_j} \right) dp \quad \text{et}$$

$$I_2 = \frac{-2}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} Hr(-p) \frac{p^j}{D(p)} dp$$

en utilisant les mêmes notations que précédemment :

$$I_2 = -2 \int_0^{\infty} hr(t) \cdot g(t) \cdot dt$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial A_j} = 2 \int_0^{\infty} g(t) \left(h(t) - hr(t) \right) dt$$

hr = réponse impulsionnelle donnée .

h = réponse impulsionnelle calculée (H(p)) .

g = transformée inverse de $\frac{p^j}{D(p)}$.

On voulait minimiser $\mathcal{E}$, écart quadratique moyen . On a démontré que , si on connait le dénominateur D(p) de la transmittance , on pouvait calculer , pour chaque valeur des coefficients du numérateur , $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial A_j}$ gradient de la fonction , considérée comme fonction des coefficients du numérateur A_j .

Deux problèmes restent à évoquer :

1) la méthode de recherche de l'optimum .

2) la méthode de simulation permettant de trouver numériquement la transformée inverse de LAPLACE d'une transmittance H(p) .

Ces deux problèmes seront traités séparément dans les deux chapitres suivants .

3 - Résultats obtenus .

Les données à fournir sont :

- la réponse impulsionnelle ,
- l'ordre de la transmittance (ordre du numérateur inférieur d'une unité à celui du dénominateur) .
- les coefficients du dénominateur .

Premier exemple

Système du premier ordre : $H(p) = \frac{5}{0,1 + p}$

$hr(t) = 5\ e^{-t/10}$

pas du calcul = 1

nombre de points donnés : 20

Résultats

valeur obtenue : 4,998106

valeur exacte : 5

Deuxième exemple

Même transmittance : $H(p) = \dfrac{5000}{100 + 1000\ p}$

$hr(t) = 5\ e^{-t/10}$

pas du calcul = 1

nombre de points donnés : 20

Résultats

valeur obtenue : 4997,984

valeur exacte : 5000

Troisième exemple

Transmittance : $H(p) = \dfrac{p+1}{(p+0,1)\ (p+0,2)\ (p+0,3)}$

$hr(t) = 45\ e^{-t/10} - 80\ e^{-t/5} + 35\ e^{-0,3t}$

pas du calcul = 1

nombre de points donnés : 20

Résultats

	valeurs obtenues	valeurs exactes
coefficient constant	0,9999865	1
coefficient de p	0,9979995	1
coefficient de p^2	0,0072041	0

Quatrième exemple

Transmittance du 2° ordre : $H(p) = \dfrac{1 + 5\,p}{0{,}02 + 0{,}3\,p + p^2}$

$hr(t) = 5\,e^{-t/10}$

pas du calcul = 1

nombre de points donnés : 20

Résultats

	valeurs obtenues	valeurs exactes
coefficient constant :	0,9987810	1
coefficient de p :	4,989533	5

Remarque :

On voit que la précision des résultats est fort acceptable pour un problème d'identification .

Cinquième exemple

Transmittance du 2° ordre : $H(p) = \dfrac{2 + 20\,p}{0{,}02 + 0{,}6\,p + 4\,p^2}$.

$hr(t) = 5\,e^{-t/10}$

pas du calcul = 2 .

nombre de points donnés : 20

Résultats

	valeurs obtenues	valeurs exactes
coefficient constant :	1,997476	2
coefficient de p :	19,96234	20

CHAPITRE 7

METHODE DES DIRECTIONS CONJUGUEES POUR LA RECHERCHE D'UN MINIMUM D'UNE FONCTION DE PLUSIEURS VARIABLES

1 - Introduction .

La méthode la plus simple est la méthode du gradient . Considérons une fonction f(x,y) de deux variables , dont on veut déterminer le minimum . En un point arbitraire , le gradient de f est donné par :

$$F_x = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad F_y = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Ce vecteur est orthogonal à la ligne de niveau du point considéré , et est dirigé vers les valeurs croissantes de f . D'où :

$$\frac{dx}{dt} = - p(t) \cdot F_x \quad (x,y)$$

$$\frac{dy}{dt} = - p(t) \cdot F_y \quad (x,y)$$

équations de la trajectoire orthogonale aux lignes de niveau de la surface ; p est un facteur de proportionalité , t un paramètre . Il suffit d' intégrér ce système d'équations .

Si f(x,y) est une fonction quadratique :

$$2f(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2kx + 2ly$$

$$F_x = Ax + By + k$$

$$F_y = Bx + Cy + l$$

Le système différentiel , devient , en choisissant p = 1 :

$$\frac{dx}{dt} = -\,(\,Ax + By + k\,)$$

$$\frac{dy}{dt} = -\,(\,Bx + Cy + l\,)$$

On utilise , pour la résolution , une méthode de rela--xation , c'est à dire que le point (n + 1) est défini , à partir du point (n) par les relations :

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - q\,.\,F_x\,(x\ ,\ y) \\ y_{n+1} &= y_n - q\,.\,F_y\,(x\ ,\ y) \end{aligned}\right\}\ q \text{ étant le pas d'intégration}$$

Le minimum de f sera situé au point où $F_x = F_y = 0$ Ce point est solution du système linéaire :

$$\begin{cases} Ax + By + k = 0 \\ Bx + Cy + l = 0 \end{cases}$$

2 - Méthode des directions conjuguées .

J'ai utilisé une méthode inspirée de la méthode des directions conjuguées (voir Références [17] à [22]) .

Voyons le principe de cette méthode des directions conjuguées :

Soit une fonction f(x) fonction de n variables x_1 , x_2 , ..., x_n , calculable , ainsi que son gradient pour chaque point

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_n \end{bmatrix}$$

Autour du minimum h , la fonction f(x) peut être développée :

$$f(x) = f(h) + \frac{1}{2} (x-h)^T A(x-h)$$

$(x-h)^T$ est le vecteur transposé du vecteur colonne $(x-h)$.

A est la matrice des dérivées du deuxième ordre , ici supposée symétrique et positive .

Le gradient $g(x)$ est calculable :

$g(x) = A(h) \cdot (x-h)$

L'optimum est atteint lorsque :

$A(h) \cdot x = k$

avec $k = A(h) \cdot h$

On passe du point x_i au point x_{i+1} par les relations suivantes :

$x_{i+1} = x_i + \alpha_i p_i$ α_i étant un scalaire

avec $(g_{i+1})^T p_i = 0$

On note : $g_{i+1} = g(x_{i+1})$

En répétant cette opération , on trouve :

$$x_n = x_{j+1} + \sum_{i=j+1}^{n-1} \alpha_i p_i$$

$$\forall j \in \{0, n-1\}$$

On en déduit :

$$g_n = g_{j+1} + \sum_{i=j+1}^{n-1} \alpha_i A . p_i$$

et donc :

$$g_n^T p_j = \sum_{i=j+1}^{n-1} \alpha_i p_j^T . A . p_j$$

Si les vecteurs $p_0 \ldots p_{n-1}$ sont A-conjugués , c'est à dire si les produits scalaires suivants sont nuls :

$$(p_i , A p_j) = 0 \quad \forall i \neq j \quad ,$$

on a , dans ce cas particulier :

$$g_n^T p_j = 0$$

On en déduit :

$$g_n = 0 \quad \text{et donc que } x_n = h \quad \text{(optimum)}$$

On a donc atteint l'optimum de la fonction f(x) .

3 - Pratique de la méthode des directions conjuguées

Pour le choix du scalaire α_i , on peut retenir :

$$\alpha_i = \frac{(p_i , r_i)}{(p_i , Ap_i)} \qquad \text{avec } r_i = k - Ax_i$$

De cette manière , le vecteur r_i est orthogonal à l'ensemble $p_0 , p_1 , \ldots, p_{i-1}$, et le produit scalaire de p_i avec $r_0 , r_1 , \ldots, r_i$ est le même . En effet :

$$(p_i , A p_j) = 0 \qquad \forall i \neq j$$

$$(p_j , r_{k+1}) = (p_j , r_k) - \alpha_k (p_j , A p_k)$$

car $r_{i+1} = r_i - \alpha_i A p_i$

si j = k , on a :

$$(p_k , r_{k+1}) = (p_k , r_k) - \frac{(p_k , r_k)}{(p_k , Ap_k)} (p_k , A p_k) = 0 \quad ,$$

si $j \neq k$, on a :

$$(p_j , r_{k+1}) = (p_j , r_k) - \alpha_k (p_j , A p_k) = (p_j , r_k)$$

On peut donc choisir α_i par :

$$\alpha_i = \frac{(p_i , r_0)}{(p_i , Ap_i)}$$

En conséquence , on peut calculer x_1 , x_2 , ..., x_n , sans con--naître r_1 , r_2 , ..., r_n , du fait que le choix des vecteurs p est indépendant de ces résultats .

Remarque :

Considérons l'erreur e(x) :

$$e(x) = (x-h)^T A (x-h)$$

$$e(x) = (x , A x) - 2 (x , k) + (h , k)$$

$$e(x+\varepsilon p) = e(x) - 2\varepsilon(p,r) + \varepsilon^2 (p,Ap)$$

$e(x +\varepsilon p)$ est minimum si :

$$\varepsilon = \frac{(p , r)}{(p , Ap)} \qquad (\text{on trouve } \varepsilon = \alpha)$$

$$e(x) - e(x +\varepsilon p) = \frac{(p , r)^2}{(p , Ap)^2}$$

La méthode considérée est donc une méthode de relaxation de l'erreur e(x) .

CHAPITRE 8

PROGRAMME DE SIMULATION DE SYSTEME LINEAIRE

1 - Introduction .

Il existe beaucoup de programmes de simulation très élaborés ; la plupart représentent , de manière numérique des blocs fonctionnels de calculateurs analogiques .

Ici , le problème est différent : il faut un program--me très limité , le plus simple possible . Il constitue , en effet , un sous -programme du programme d'identification , et il sera appelé par ce dernier de très nombreuses fois .

J'ai choisi de calculer , à partir des valeurs des cefficients de la transmittance H(p) , la réponse impulsion--nelle h(t) . J'utilise pour ce calcul la ressemblance entre la fonction h(t) et la même fonction échantillonnée , lorsque la période d'échantillonnage T reste très petite .

La réponse à une entrée quelconque x(t) sera obtenue par convolution de x(t) et h(t) :

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

2 - Calcul de la réponse impulsionnelle .

On calcule la valeur de la fonction h(nT) aux instants d'échantillonnage de deux manières différentes :

1) à partir de la transformée de Laplace de la fonction h(t) :

$$h(nT) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{npT} H(p)\, dp$$

2) à partir de la transformée en z de la fonction échantillonnée :

$$h(nT) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\phi} z^{n-1} H(z)\, dz$$

H(z) : transformée de z de h(t) échantillonnée .

ϕ : cercle unitaire centré à l'origine du plan complexe .

En effet , on sait que :

$$H(z) = h(0T) + h(T)\, z^{-1} + \ldots + h(nT)\, z^{-n}$$

$$z^{n-1} H(z) = z^{n-1}.\, h(0T) + \ldots + z^{-1} h(nT)$$

Si on intégre cette fonction $z^{n-1} H(z)$ sur le cercle ϕ , cette intégrale est égale à $2 i\pi$ fois la somme des résidus .

$$\int_{\phi} z^{n-1} H(z)\, dz = 2 i \pi \sum \text{résidus}$$

Or la somme des résidus représente le coefficient du terme z^{-1} dans le développement de Laurent .

Donc : $\sum$ résidus = h(nT)

$$\int_{\phi} z^{n-1} H(z)\, dz = 2 i\pi . h(nT)$$

D'autre part :

$$h(nT) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\frac{i\pi}{T}}^{\frac{i\pi}{T}} H(p)\, e^{npT}\, dp + \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{i\pi}{T}}^{i\infty} H(p)\, e^{npT}\, dp - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\frac{i\pi}{T}}^{-i\infty} H(p)\, e^{npT}\, dp$$

Si T est suffisamment petit , on écrit :

$$h(nT) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{-i\pi}{T}}^{\frac{i\pi}{T}} H(p)\, e^{npT}\, dp$$

On pose $z = e^{Tp}$

$$p = \frac{1}{T} \ln z \qquad dp = \frac{1}{T}\,\frac{1}{z}\, dz$$

$$\boxed{h(nT) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\emptyset} \frac{1}{T}\, H\left(\frac{\ln z}{T}\right) z^{n-1}\, dz}$$

$\emptyset$: cercle unitaire du plan complexe .

On voit donc , qu'au coefficient $\frac{1}{T}$ près , on peut faire cor--respondre H(z) et $H\left(\frac{\ln z}{T}\right)$.

On développe H(p) :

$$H(p) = a_1 p^{-1} + a_2 p^{-2} + \ldots$$

On peut remplacer $\frac{1}{p}$ par :

$$\frac{1}{p} = \frac{T}{\ln z} \simeq \frac{T/2}{u + \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5}} \simeq \frac{T}{2}\left[\frac{1}{u} - \frac{u}{3} - \frac{4u^3}{45} - \frac{44u^5}{954} \ldots\right]$$

avec $u = \frac{z-1}{z+1}$

On calculera de proche en proche les termes p^{-k} .

En les remplaçant dans H(p) , on obtiendra un développement en z . Les coefficients de z^{-k} seront évidemment les valeurs de h(kT) . On obtient par cette méthode , à partir de la fonc--tion transmittance H(p) , la fonction h(nT) réponse impulsion--nelle cherchée .

3 - Calcul des coefficients de p^{-k} .

On sait que :

$$p^{-1} = \frac{T}{2}\left[\frac{1}{u} - \frac{u}{3} - \frac{4u^3}{45} - \frac{44u^5}{954} - \dots\right]$$

Pour chaque valeur de k , on évalue p^{-k} et , ensuite on ne conserve que les termes u^{-n} et les termes constants .

k = 1

$$\frac{1}{p} \simeq \frac{T}{2u} \simeq \frac{T(1+z^{-1})}{2(1-z^{-1})}$$

k = 2

$$\frac{1}{p^2} \simeq \frac{T^2}{4}\left(\frac{1}{u} - \frac{u}{3}\right)^2 \simeq \frac{T^2}{4}\left(\frac{1}{u^2} - \frac{2}{3}\right) \simeq \frac{T^2}{4}\ \frac{1 + 10z^{-1} + z^{-2}}{\left(1 - z^{-1}\right)^2}$$

k = 3

$$\frac{1}{p^3} = \frac{T^3}{8}\left(\frac{1}{u^3} - \frac{1}{u}\right) \simeq \frac{T^3}{8}\ \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}}\ \frac{(1+z^{-1})^2 - (1-z^{-1})^2}{(1-z^{-1})^2}$$

$$= \frac{T^3}{8}\qquad \frac{4z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$$

On peut ainsi établir , de proche en proche , le tableau suivant : (pour des valeurs de k allant jusqu'à 9)

k	p^{-k}
1	$\frac{T}{2} \quad \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$
2	$\frac{T^2}{12} \quad \frac{1+10z^{-1}+z^{-2}}{(1-z^{-1})^2}$
3	$\frac{T^3}{2} \quad \frac{z^{-1}+z^{-2}}{(1-z^{-1})^3}$
4	$T^4 \quad \frac{-\frac{z^{-4}}{720}+\frac{31z^{-3}}{180}+\frac{79z^{-2}}{120}+\frac{31z^{-1}}{180}-\frac{1}{120}}{(1-z^{-1})^4}$
5	$\frac{T^5}{24} \quad \frac{z^{-1}(z^{-1}+11z^{-2}+11z^{-3}+z^{-4})}{(1-z^{-1})^5}$
6	$\frac{T^6}{120} \quad \frac{z^{-1}(z^{-1}+26z^{-2}+66z^{-3}+26z^{-4}+z^{-5})}{(1-z^{-1})^6}+\frac{T^6}{30240}$
7	$\frac{T^7}{720} \quad \frac{z^{-1}(z^{-1}+57z^{-2}+302z^{-3}+302z^{-4}+57z^{-5}+z^{-6})}{(1-z^{-1})^7}$
8	$\frac{T^8}{1209600} \quad \frac{\begin{bmatrix}-1+248z^{-1}+28772z^{-2}+285896z^{-3}+579770z^{-4}\\+285896z^{-5}+28772z^{-6}+248z^{-7}-z^{-8}\end{bmatrix}}{(1-z^{-1})^8}$
9	$\frac{T^9}{40320} \quad \frac{\begin{bmatrix}z^{-1}+247z^{-2}+4293z^{-3}+15619z^{-4}\\+15619z^{-5}+4293z^{-6}+247z^{-7}+z^{-8}\end{bmatrix}}{(1-z^{-1})^9}$

4- Problèmes rencontrés .

Un programme en langage Fortran a été réalisé . (On trouvera son listing dans les Annexes .)

4 1 - Calcul de la valeur h(0) .

La méthode numérique donne une légère erreur pour la valeur initiale de la réponse impulsionnelle .

Exemples :

- Pour un système intégrateur , avec un pas de calcul de 0,8 s; on a :

h(0) = 0,5 (au lieu de 1)

Les valeurs suivantes sont exactes : h(2) = h(3) = 1

- Pour un système de transmittance :

$$H(p) = \frac{1 + 11p + 10p^2}{1 + 15p + 54p^2 + 40p^3}$$

avec un pas de calcul de 0,8 seconde

On trouve h(0) = 0,0918 (au lieu de 0)

Les autres valeurs sont peu affectées : h(0,8) = 0,2282

h(1,6) = 0,1753

En conséquence , le premier point de la réponse impulsionnelle sera calculé indépendamment :

h(0) = lim pH(p) pour p infini

Ce résultat sert pour le calcul des valeurs suivantes .

4 2 - Influence du pas d'échantillonnage(TEI).

On a vu que la valeur du pas d'échantillonnage devait être la plus faible possible : c'est une hypothèse du calcul . Sinon des erreurs apparaissent .

Exemples :

-Réponse impulsionnelle du système : $H(p) = \frac{1}{1+p}$ avec TEI = 2,5 s .

	valeurs obtenues	valeurs exactes
h(0) =	1	1
h(2,5) =	0,1975	0,082
h(5) =	- 0,021	0,006
h(7,5) =	0,024	0,00050
h(10) =	-0,00027	0,000032

- Réponse indicielle du système $H(p) = \frac{1}{1 + p}$

valeur asymptotique calculée : 1

avec TEI = 0,5 $h(\infty) = 1,0392$

avec TEI = 1,25 $h(\infty) = 1,2403$

avec TEI = 2,5 $h(\infty) = 1,6947$

Ces exemples montrent qu'il faut modifier le programme. Je n'ai trouvé aucune théorie satisfaisante pour le choix d'un TEI idéal . J'ai admis donc que , si les résultats de calculs pour une valeur TEI donnée à priori , et les résultats des mêmes calculs pour la valeur TEI/2 étaient sensiblement égaux , ces résultats seraient acceptés . (Les résultats pour TEI/2 sont , bien sûr , plus exacts que ceux pour TEI .) Si les résultats sont trop différents , les calculs seront poursuivis pour les valeurs TEI/4 et TEI/8 , le test à nouveau fait , et ainsi de suite .

Pour le test , le premier critère choisi a été :

$$q = \int_0^\infty (h(t) - h'(t))^2 \, dt$$

h(t) calculée avec le pas TEI , h'(t) avec TEI/2 . Soit :

$$Q = \int_0^\infty (h'(t))^2 \, dt$$

si $q < \alpha Q$, le résultat est admis (α donné) .

Ce critère n'a pas donné de bons résultats .

Exemples : pour un système $H(p) = \frac{1}{1+p}$

$TEI = 0,5\ s.$ $\qquad \alpha = 10^{-3}$

$Q = 1,59$

$q = 0,00083 \Rightarrow q < \alpha Q$

cependant les résultats sur h(t) sont faux à plus de 5%

Ceci vient du fait de la forme particulière de la réponse impulsionnelle , et de son extinction rapide . D'autre part , pour des courbes impulsionnelles à valeur initiale non nulle , l'aire Q de la courbe est fortement influencée par cette valeur initiale h(0) , indépendante du pas (voir § 41) . On a donc préféré tester sur une courbe d'aire plus caractéristique , par exemple la réponse indicielle , d'élaboration très aisée .

Les résultats ont été excellents , et on a pu augmenter α jusqu'à 10^{-2} .

4 3 - Fonction de transfert avec retard .

Ce cas n'a pas été prévu explicitement dans le programme . On peut traiter le cas où ce retard τ est un multiple entier du pas d'échantillonnage TEI .

$$e^{-p\tau} = e^{-pk\ TEI}$$

La transformée en z sera simplement multipliée par la quantité z^{-k} .

4 4 - Conditions initiales .

Le cas où les conditions initiales du système ne seraient pas nulles , n'a pas été prévu , mais serait relativement facile à greffer sur le programme existant (par superposition) .

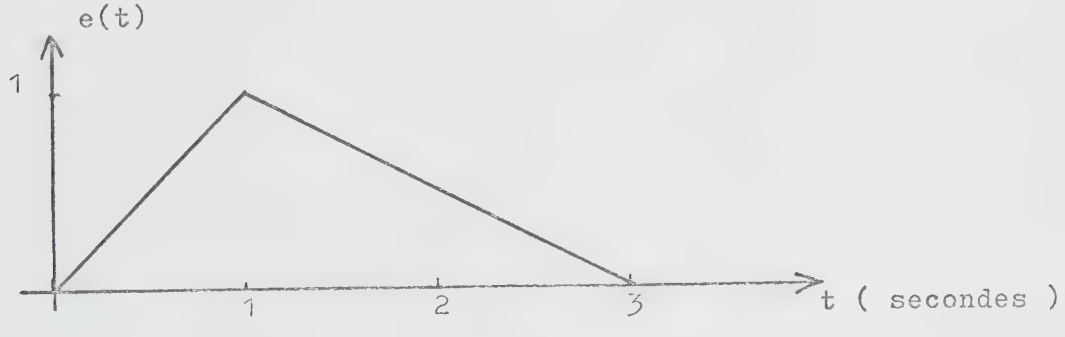
5 - Exemples .

J'ai testé la validité du programme sur un grand nombre de transmittances pour des signaux d'entrée différents . La précision des résultats est excellente et le temps de calcul particulièrement court .

Un exemple simple est donné pour une transmittance du premier ordre :

$$H(p) = \frac{1}{1 + p}$$

soumise à une entrée e(t) triangulaire :



Voir les résultats à la page 81 .

SIMULATION DE SYSTEMES LINEAIRES

ORDRE DE LA TRANSMITTANCE = 1
COEFFICIENTS DU NUMERATEUR =
1.0000
COEFFICIENTS DU DENOMINATEUR
1.0000 1.0000
PAS DU CALCUL = 0.1000

REPONSE DU SYSTEME

TEMPS	ENTREE	SORTIE
0.0	0.0	0.0
0.1000	0.1000	0.0049
0.2000	0.2000	0.0188
0.3000	0.3000	0.0410
0.4000	0.4000	0.0705
0.5000	0.5000	0.1068
0.6000	0.6000	0.1491
0.7000	0.7000	0.1969
0.8000	0.8000	0.2497
0.9000	0.9000	0.3070
1.0000	1.0000	0.3684
1.1000	0.9500	0.4267
1.2000	0.9000	0.4741
1.3000	0.8500	0.5123
1.4000	0.8000	0.5420
1.5000	0.7500	0.5642
1.6000	0.7000	0.5795
1.7000	0.6500	0.5886
1.8000	0.6000	0.5920
1.9000	0.5500	0.5904
2.0000	0.5000	0.5841
2.1000	0.4500	0.5737
2.2000	0.4000	0.5595
2.3000	0.3500	0.5419
2.4000	0.3000	0.5212
2.5000	0.2500	0.4977
2.6000	0.2000	0.4717
2.7000	0.1500	0.4434
2.8000	0.1000	0.4131
2.9000	0.0500	0.3809
3.0000	0.0	0.3469
3.1000	0.0	0.3137
3.2000	0.0	0.2838
3.3000	0.0	0.2568
3.4000	0.0	0.2324
3.5000	0.0	0.2103
3.6000	0.0	0.1903
3.7000	0.0	0.1721
3.8000	0.0	0.1558
3.9000	0.0	0.1409

4ème partie

APPLICATION A L'IDENTIFICATION D'UN PROCESSUS INDUSTRIEL MULTIVARIABLE .

A P P L I C A T I O N

IDENTIFICATION D'UN PROCESSUS INDUSTRIEL DE DISTILLATION

1 Introduction .

Le processus choisi a été décrit dans l'introduction . Rappelons que nous distinguons deux types de fonctionnement : la distillation et la rectification .

Il faut signaler que certains enregistrements de certaines variables du processus en fonction du temps ont été difficiles à réaliser et donc , difficiles à exploiter sur toute la longueur de l'enregistrement . J'ai donc sélectionné des portions d'enregistrement pour lesquelles l'évolution des variables semblait donner des résultats cohérents . L'identification porte sur des zones de marche normale de l'alambic (est exclue la période de mise en route de l'alambic , pendant laquelle il n'y a pas de débit de distillat) . Les enregistrements utilisés sont les enregistrements bruts . Seul le choix des zones choisies a été arbitraire .

Il peut paraître intéressant , à partir des résultats obtenus , de simuler le processus pour vérifier ces résultats . Une simulation numérique est ici illusoire : la méthode proposée minimise l'écart entre les enregistrements proposés et ceux obtenus par simulation ; les résultats seraient , par essence , forcément concluants .

Une simulation analogique aurait été plus probante ; mais

la forme des signaux d'entrée aurait été très difficile à élaborer . Elle a donc été éliminée .

La seule vérification que nous ayons pu faire , est dûe , un peu , au hasard . Pendant une journée de rectification , une erreur de conduite de l'alambic a amené des perturbations d'assez grandes amplitudes sur certaines variables d'entrée . J'ai donc pu vérifier dans ce cas précis la validité des résultats . On verra que ces résultats sont très acceptables .

Pour chaque transmittance cherchée , nous avons gardé le modèle qui donnait le meilleur résultat vis à vis de la réponse impulsionnelle obtenue par déconvolution des fonctions d'inter- et autocorrélation des signaux d'entrée et de sortie :

Si h(t) est la réponse impulsionnelle obtenue , de cette manière , on appelle QS la quantité :

$$QS = \int_0^\infty h^2(t)\, dt$$

Si g(t) est la réponse impulsionnelle correspondant au modèle $\frac{N_{(p)}}{D_{(p)}}$, on appelle F la quantité :

$$F = \int_0^\infty (h(t) - g(t))^2\, dt$$

Pour chaque réponse impulsionnelle , le programme nous donne , en général , quatre modèles (premier ordre , deuxième ordre , troisième ordre , quatrième ordre) . Le modèle adopté est celui qui donne la plus faible valeur de F . On constate que les modèles d'ordres élevés ne sont pas meilleurs que ceux

d'ordres relativement bas . Dans le cas présent, on peut affirmer que les modèles d'ordre 2 sont les plus représentatifs .

La période d'échantillonnage des relevés des enregistrements a été de 3 minutes . Pour des commodités de calcul , une homothétie a été faite sur l'échelle des temps , et la période ramenée à 0,1 seconde . Ceci , afin d'avoir pour les coefficients des transmittances , des nombres de grandeurs semblables ; la précision de la méthode est meilleure . Pour retrouver les résultats réels , il suffira de multiplier , dans les transmittances , chaque coefficent : le coefficient de p^k sera multiplié par $(1800)^k$.

Tous les résultats donnés ci-après , sont calculés avec un pas d'échantillonnage de 0,1 seconde .

Les unités choisies sont :

- degré alcoolique ;
- débits d'eau et de distillat en litres par seconde ;
- pour la vapeur, la mesure , en litres par seconde , porte sur le débit d'eau obtenu par condensation grâce à un serpentin immergé .

2 - Résultats concernant le débit alcoolique en fonction des variables d'entrée .

Les résultats donnent des systèmes du premier ordre , de constantes de temps extrèmement faibles. J'ai donc assimilé les transmittances obtenues à des constantes .

2 1 - Débit alcoolique pour une rectification :

1) débit alcoolique / débit d'eau du déflegmateur : K = -0,02

2) débit alcoolique / débit d'eau du serpentin : K = -0,11

3) débit alcoolique / débit d'eau secondaire : K = -0,12

2 2 - Débit alcoolique pour une distillation :

1) débit alcoolique / débit de vapeur : K = 0,01

2) débit alcoolique / débit d'eau du déflegmateur : K = -0,0104

3) débit alcoolique / débit d'eau du serpentin : K = -0,0565

2 3 - Remarques .

Le signe des valeurs de K obtenues lorsque les entrées sont des débits d'eau, est cohérent : si on fait une distillation ou une rectification plus sévère, par augmentation des débits d'eau, le débit alcoolique doit baisser .

Ces résultats, même simplifiés , demeurent valables . Pour une éventuelle régulation ou optimisation du système , la grandeur de sortie importante est le degré alcoolique .

3 - Résultats concernant le degré alcoolique pour une rectification .

3 1 - Transmittance : degré alcoolique / débit de vapeur .

Il n'a pas été possible d'identifier sérieusement cette transmittance . Cela est dû au fait que, pendant la rectification , le débit de vapeur varie peu . Etant donnée l'imprécision des mesures, si on tient compte de cette variable , le calcul des autres transmittances est affecté et ne donne pas de résultats valables . Par contre, si on la néglige , les autres calculs deviennent cohérents .

3 2 - Transmittance : degré alcoolique / débit d'eau du déflegmateur .

$$H(p) = \frac{e + fp}{a + bp + cp^2} \exp(-0,2p)$$

avec:

$e = 0,9113569\ 10^{-1}$

$f = 0,1334503\ 10^{0}$

$a = 0,3144400\ 10^{-2}$

$b = 0,1654425\ 10^{-2}$

$c = 0,2010843\ 10^{-2}$

On trouvera page 88 , la réponse impulsionnelle réelle et celle correspondant au modèle H(p) .

3 3 - Transmittance : degré alcoolique / débit d'eau secondaire .

$$H(p) = \frac{e + fp}{a + bp + cp^2} \exp(-0,2p)$$

avec :

$e = 0,9906840\ 10^{-1}$

$f = 0,2712466\ 10^{-1}$

$a = 0,1360102\ 10^{-2}$

$b = 0,9379523\ 10^{-3}$

$c = 0,7152715\ 10^{-3}$

3 4 - Transmittance : degré alcoolique / débit d'eau du serpentin .

$$H(p) = \frac{e + fp}{a + bp + cp^2} \exp(-0,2p)$$

avec :

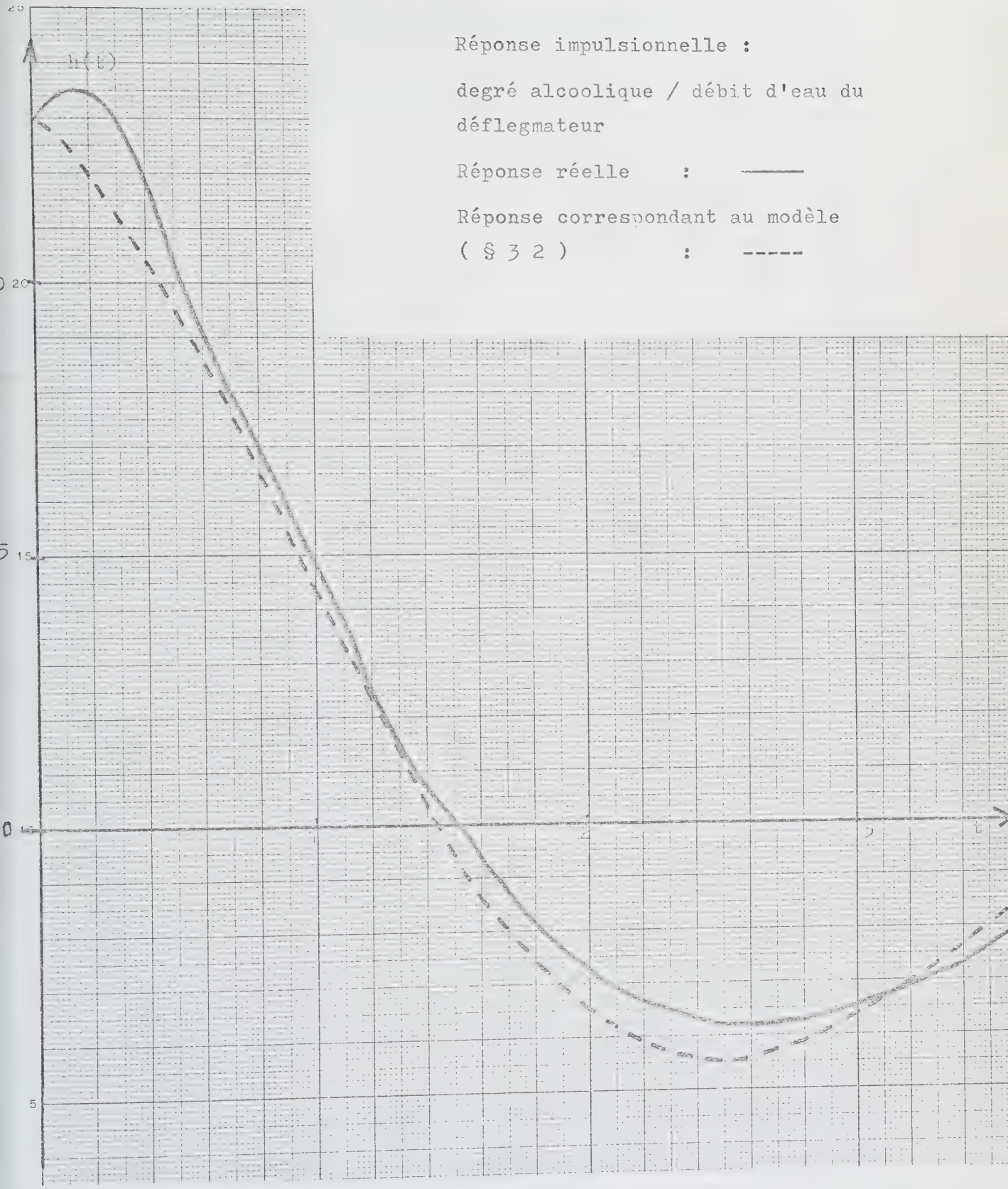
$e = 0,7785202\ 10^{0}$

$f = 0,4060772\ 10^{-1}$

$a = 0,3174862\ 10^{-3}$

$b = 0,2481422\ 10^{-3}$

$c = 0,1043917\ 10^{-3}$



Réponse impulsionnelle :

degré alcoolique / débit d'eau du déflegmateur

Réponse réelle : ———

Réponse correspondant au modèle (§ 3 2) : - - - - -

4 - Résultats concernant le degré alcoolique pour une distillation .

4 1 - Transmittance : degré alcoolique / débit de vapeur .

$$H(p) = \frac{e}{a + bp} \exp(-0,2p)$$

avec :

$e = 0,9185546\ 10^{-1}$

$a = 0,1437687\ 10^{-5}$

$b = 0,3320131\ 10^{-5}$

4 2 - Transmittance : degré alcoolique / débit d'eau du déflegmateur .

1) Modèle du premier ordre :

$$H(p) = \frac{e}{a + bp} \exp(-0,2p)$$

avec :

$e = 0,1002041\ 10^{0}$

$a = 0,1770726\ 10^{-2}$

$b = 0,1772402\ 10^{-2}$

2) Modèle du deuxième ordre :

$$H(p) = \frac{e + fp}{a + bp + cp^2} \exp(-0,2p)$$

avec :

$e = 0,9507472\ 10^{-1}$

$f = 0,1147232\ 10^{-1}$

$a = 0,2017161\ 10^{-2}$

$b = 0,1569812\ 10^{-2}$

$c = 0,2225464\ 10^{-3}$

Ces deux modèles sont différents , comme l'attestent les courbes de la page 90 . Ils donnent néanmoins le même rapport F/QS .

Réponse impulsionnelle :

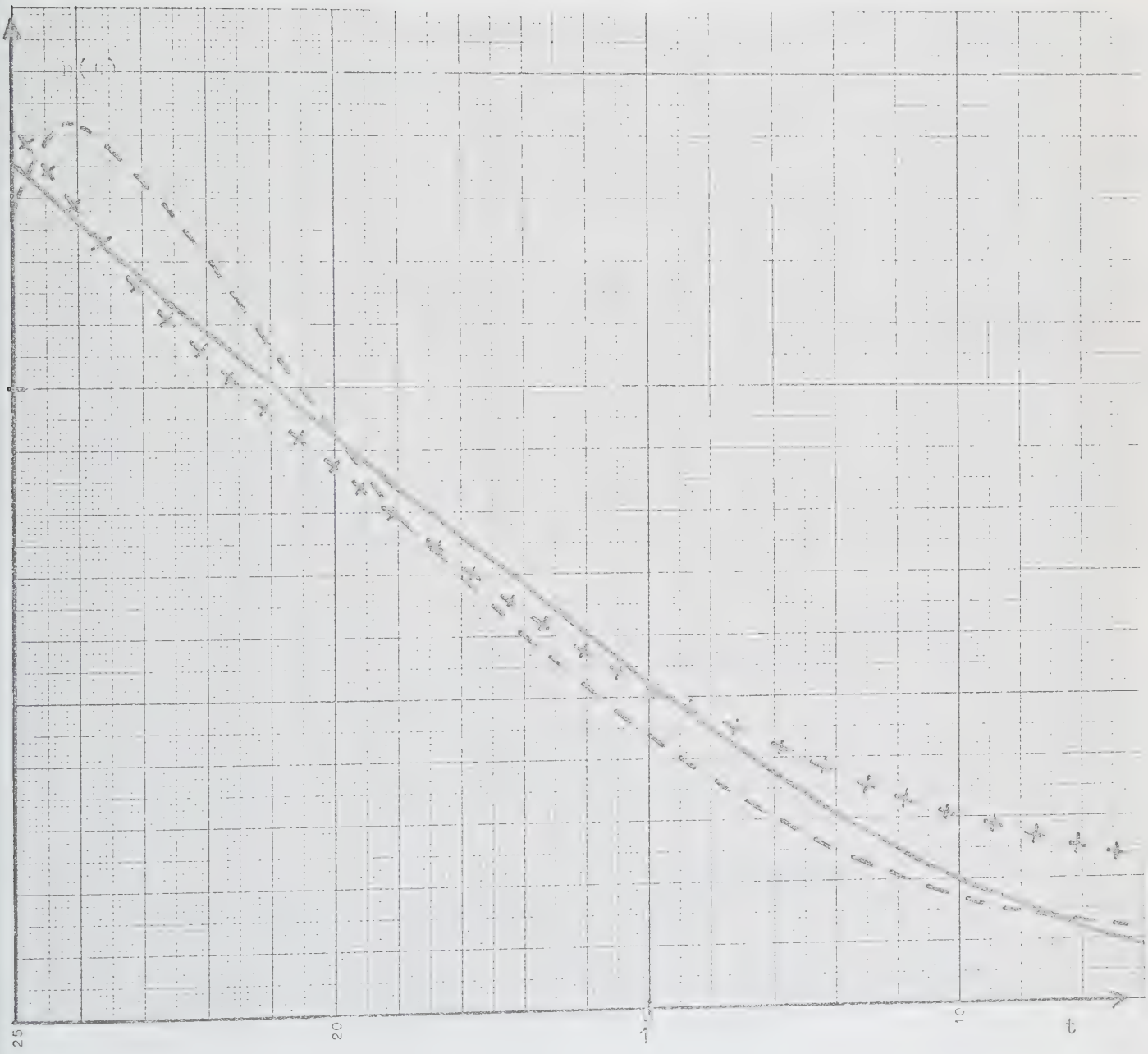
degré alcoolique / débit d'eau du déflegmateur

Réponse réelle : ——————

Réponses correspondant aux modèles (§ 4 2)

- du 1^{cr} ordre : ++++++

- du 2ème ordre : – – – – –



4 3 - Transmittance : degré alcoolique / débit d'eau du serpentin .

$$H(p) = \frac{e + fp}{a + bp + cp^2} \exp(-0,2p)$$

avec :

$e = 0,9425988\ 10^{-1}$

$f = 0,1150009\ 10^{-1}$

$a = 0,3699826\ 10^{-3}$

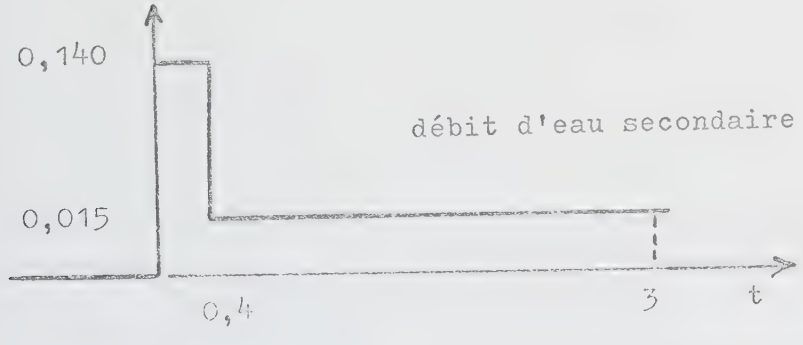
$b = 0,2779121\ 10^{-3}$

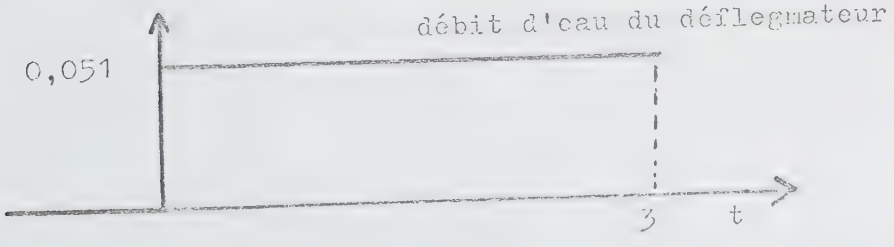
$c = 0,4058871\ 10^{-4}$

On peut constater que l'influence du déflegmateur est approximativement cinq fois plus importante que celle du serpentin . Ceci confirme les résultats obtenus (§ 2) pour le débit alcoolique .

5 - Vérification partielle des résultats .

Cette vérification a été faite dans le cadre d'une rectification , par variation brusque et importante de deux variables d'entrée, à l'instant t_v . Par rapport à leur valeur pour $t = t_v$ les enregistrements des deux variables ont la forme suivante :

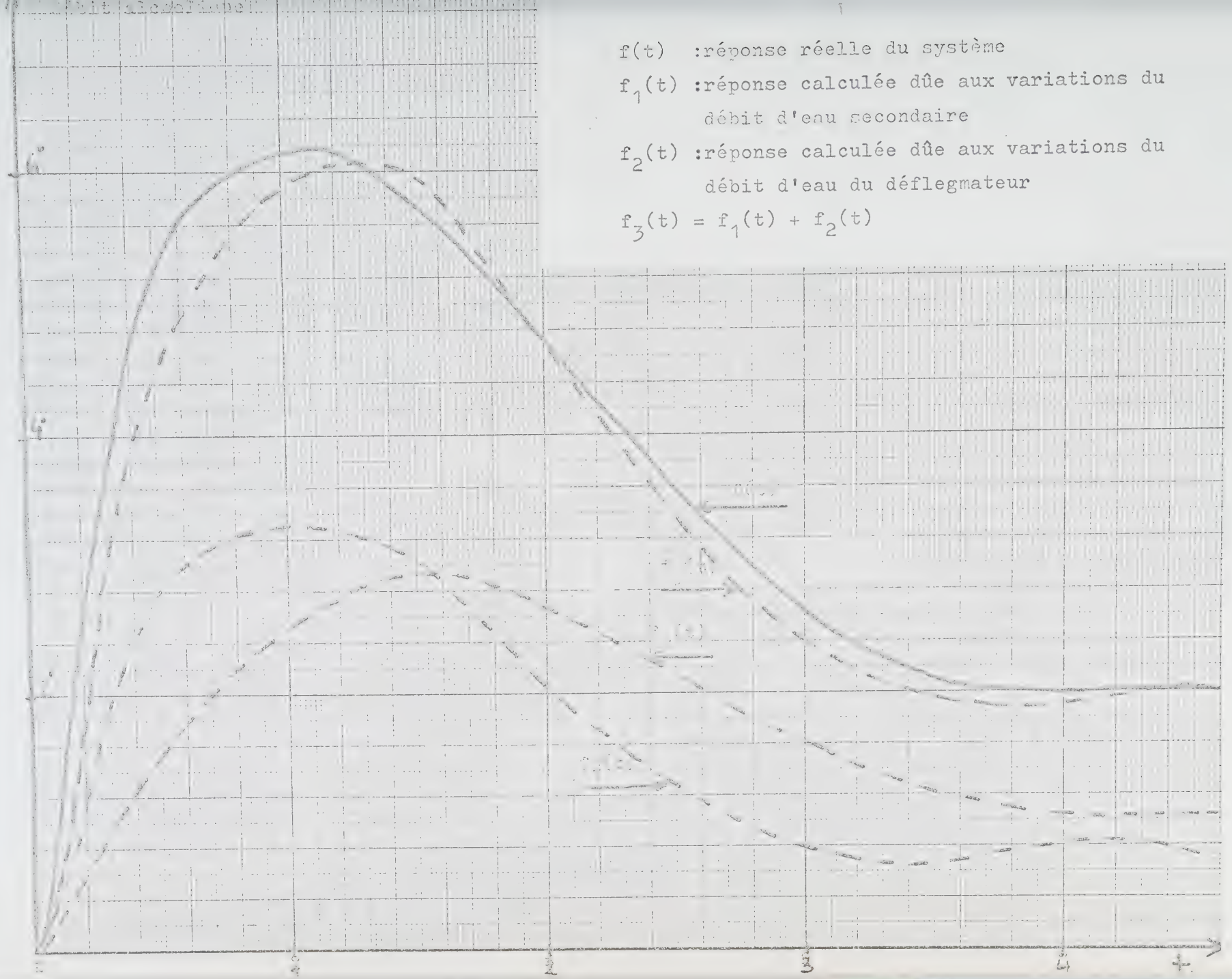




Les débits de vapeur et d'eau du serpentin sont restés constants pendant ces perturbations .

On trouvera page 93 l'enregistrement effectué sur le degré alcoolique et les valeurs calculées à partir des transmittances (§ 3 2 et § 3 3) .

Les résultats sont convenables , mais d'autres expériences auraient été nécessaires pour tester la validité des modèles proposés .


f(t) :réponse réelle du système
$f_1(t)$:réponse calculée dûe aux variations du débit d'eau secondaire
$f_2(t)$:réponse calculée dûe aux variations du débit d'eau du déflegmateur
$f_3(t) = f_1(t) + f_2(t)$

C O N C L U S I O N

Essayons de dresser un bilan de notre travail .

1 - Le but proposé (identification à postériori d'un système physique multivariable) a été atteint , au prix de simplifications . Malgré des enregistrements restreints , assez pauvres en informations de qualité , effectués dans de mauvaises conditions matérielles , j'ai pu donner un modèle du processus observé .

J'aurais désiré faire des vérifications sur le processus mais cela a été impossible .

2 - Il faut constater que pour une identification de ce type , ("pas d'expériences, mais des observations" , comme le dit J. LOEB)il est illusoire de chercher des modèles mathématiques d'ordre élevé .

3 - La méthode proposée est simple , et donne des résultats convenables . L'apport des fonctions automodulatrices ne me semble pas négligeable .

Des théories d'un formalisme avancé , très sophistiqué sont publiées actuellement . Je crois qu'il faudra trouver un moyen terme entre ces travaux et la réalité pratique .

La méthode proposée ne prétend pas remplacer les méthodes existantes . Elle s'ajoute à la panoplie des méthodes mises à la disposition de l'ingénieur .

annexes

Un échantillon des programmes utilisés est donné dans ces annexes . On trouvera :

Pages 97 à 100 :

Programme de calcul des réponses impulsionnelles pour un système à plusieurs entrées, par déconvolution des fonctions d'intercorrélation et d'autocorrélation ; la déconvolution est faite au sens des moindres carrés, et la minimisation par la méthode des gradients conjugués .

Pages 101 à 104 :

Programme de calcul du dénominateur, à partir de la réponse impulsionnelle , par la méthode des fonctions automodulatrices .

Pages 105 à 109 :

Programme de calcul du numérateur , à partir de la réponse impulsionnelle, et des coefficients du dénominateur .

Pages 110 à 112 :

Programme de simulation d'un système linéaire soumis à une entrée donnée .

```
*IOCS(CARD,1132 PRINTER)
*ONE WORD INTEGERS
*LIST SOURCE PROGRAM
      DIMENSION ENU(2,100)
      DIMENSION SC(100)
      DIMENSION XP(100),YP(100),FACN(2,2,50),FICN(2,50)
      COMMON IFR
      COMMON N,ENT(2,50),S(50),X(100),F,G(100)
      COMMON NLU,NCU,TEI
      COMMON NCUB,NLUB,NEN
      READ(2,2000)TEI
 2000 FORMAT(F8.4)
      READ(2,2001)NEN
      READ(2,2001)MI
      READ(2,2001)NCUB
 2001 FORMAT(I2)
      MJ=2*MI-1
      DO 12 I=1,MJ
      DO 10 J=1,NEN
 10   ENU(J,I)=0.
 12   S(I)=0.
      M3=MI-1
      M3M1=M3-1
      M3M2=M3-2
      NCU=NEN*NCUB
      N=NCU
      NLUB=M3
      NLU=NLUB
      DO 1 I=MI,MJ
 1    READ(2,119)ENU(1,I),ENU(2,I),S(I)
 119  FORMAT(3F6.4)
      WRITE(2,117)
 117  FORMAT(/)
C CALCUL DES FONCTIONS DE CORRELATION
      DO 8 M=1,NEN
      DO 7 L=1,NEN
      DO 5 I=1,MJ
      XP(I)=ENU(M,I)
 5    YP(I)=ENU(L,I)
      DO 6 IDECA=1,M3M1
      CALL ABOI(XP,YP,MI,MJ,RESU,IDECA)
 6    FACN(M,L,IDECA)=RESU
 7    CONTINUE
 8    CONTINUE
      DO 88 M=1,NEN
      DO 55 I=1,MJ
      XP(I)=ENU(M,I)
 55   YP(I)=S(I)
      DO 66 IDECA=1,M3M1
      CALL ABOI(XP,YP,MI,MJ,RESU,IDECA)
      IPK=MI+1+IDECA
      IPL=MI+1
 66   FICN(M,IDECA)=RESU+ENU(M,IPK)*S(IPL)/2.
 88   CONTINUE
      DO 200 I=1,NEN
 200  FICN(I,M3)=0.
      DO 201 I=1,NEN
      DO 201 J=1,NEN
 201  FACN(I,J,M3)=0.
      DO 202 J=1,NEN
      DO 202 I=1,M3
      ICA=M3-I+1
      IDE=I+(J-1)*NLUB
 202  S(IDE)=FICN(J,ICA)
      DO 203 J=1,NEN
      DO 203 K=1,M3
      ICA=M3-K+1
 203  ENT(J,K)=FACN(1,J,ICA)
      CALL MINI
      DO 3 I=1,NCU
      WRITE(2,1008)X(I)
 3    WRITE(3,1000)X(I)
 1000 FORMAT(' ',E14.7)
 1008 FORMAT(E14.7)
      WRITE(3,1001)IER
 1001 FORMAT(' ',I4)
```

```
      DO 92 I=1,NCUB
      SC(I)=0.
      DO 94 IEN=1,NEN
      DO 93 L=1,I
      LO=L+(IEN-1)*NCUB
      INDI=I-L+1
93    SC(I)=SC(I)+X(LO)*ENT(IEN,INDI)*TEI
 94   CONTINUE
92    CONTINUE
      DO 95 I=1,NCUB
95    WRITE(3,96)S(I),SC(I)
96    FORMAT(' ',E14.7,10X,E14.7)
      STOP
      END


*ONE WORD INTEGERS
*LIST SOURCE PROGRAM
      SUBROUTINE ABOI(XP,YP,MI,MJ,RESU,IDECA)
      DIMENSION XP(100),YP(100)
      DIMENSION FF(100)
      DO 25 I=MI,MJ
      INDI=I-MI+1
      IMK=I-IDECA
      FF(INDI)=XP(I)*YP(IMK)
25    CONTINUE
      DO 111 I=1,MI
      IDEB=I
      IF(FF(IDEB))110,111,110
111   CONTINUE
110   CONTINUE
      DO 114 I=1,MI
      IFIN=MI-I+1
      IF(FF(IFIN))113,114,113
114   CONTINUE
113   CONTINUE
      I1=IDEB+1
      I2=IFIN-1
      IF(IFIN-IDEB)117,117,116
117   CONTINUE
      RESU=0.
      RETURN
116   CONTINUE
      RESU=(FF(IDEB)+FF(IFIN))/2.
      IF(I2-I1)118,119,119
118   RETURN
119   CONTINUE
      DO 115 I=I1,I2
      RESU=RESU+FF(I)
115   CONTINUE
      RETURN
      END


*ONE WORD INTEGERS
*LIST SOURCE PROGRAM
      SUBROUTINE MINI
      DIMENSION V(200)
      COMMON IER
      COMMON N,ENT(2,50),S(50),X(100),F,G(100)
      COMMON NLU,NCU,TEI
      COMMON NCUB,NLUB,NEN
      DO 505 I=1,N
505   X(I)=1.
      EST=0.
      SU=0.
      DO 504 I=1,NLU
504   SU=SU+(S(I)*S(I))
      EPS=0.05*SU
      LIMIT=1000
      CALL FUNCT
      KOUNT=0
      IER=0
      N1=N+1
```

```
      1 DO 43 II=1,N1
        KOUNT=KOUNT+1
        OLDF=F
        GNRM=0.
        DO 2 J=1,N
      2 GNRM=GNRM+G(J)*G(J)
        IF(GNRM)46,46,3
      3 IF(I-1)4,4,6
      4 DO 5 J=1,N
      5 V(J)=-G(J)
        GO TO 8
      6 AMBDA=GNRM/OLDG
        DO 7 J=1,N
      7 V(J)=AMBDA*V(J)-G(J)
      8 DY=0.
        HNRM=0.
        DO 9 J=1,N
        K=J+N
        V(K)=X(J)
        HNRM=HNRM+ABS(V(J))
      9 DY=DY+V(J)*G(J)
        IF(DY)10,42,42
     10 SNRM=1./HNRM
        FY=F
        ALFA=2.*(EST-F)/DY
        AMBDA=SNRM
        IF(ALFA)13,13,11
     11 IF(ALFA-AMBDA)12,13,13
     12 AMBDA=ALFA
     13 ALFA=0.
     14 FX=FY
        DX=DY
        DO 15 I=1,N
     15 X(I)=X(I)+AMBDA*V(I)
        CALL FUNCT
        FY=F
        DY=0.
        DO 16 I=1,N
     16 DY=DY+G(I)*V(I)
        IF(DY)17,38,20
     17 IF(FY-FX)18,20,20
     18 AMBDA=AMBDA+ALFA
        ALFA=AMBDA
        IF(HNRM*AMBDA-1.E10)14,14,19
     19 IER=2
        RETURN
     20 ET=0.
     21 IF(AMBDA)22,38,22
     22 Z=3.*(FX-FY)/AMBDA+DX+DY
        IF(ABS(Z)-ABS(DX))100,101,101
    101 PROV=ABS(Z)
        GO TO 102
    100   PROV=ABS(DX)
    102 IF(PROV-ABS(DY))103,104,104
    103 ALFA=ABS(DY)
        GO TO 105
    104 ALFA=PROV
    105 CONTINUE
        DALFA=Z/ALFA
        DALFA=DALFA*DALFA-DX/ALFA*DY/ALFA
        IF(DALFA)23,27,27
     23 DO 24 J=1,N
        K=N+J
     24 X(J)=V(K)
        CALL FUNCT
     25 IF(IER)47,26,47
     26 IER=-1
        GOTO 1
     27 W=ALFA*SQRT(DALFA)
        ALFA=(DY+W-Z)*AMBDA/(DY+2.*W-DX)
        DO 28 I=1,N
     28 X(I)=X(I)+(ET-ALFA)*V(I)
        CALL FUNCT
        IF(F-FX)29,29,30
     29 IF(F-FY)38,38,30
     30 DALFA=0.
```

```
      DO 31 I=1,N
   31 DALFA=DALFA+G(I)*V(I)
      IF(DALFA)32,35,35
   32 IF(F-FX)34,33,35
   33 IF(DX-DALFA)34,38,34
   34 FX=F
      DX=DALFA
      ET=ALFA
      AMBDA=ALFA
      GO TO 21
   35 IF(FY-F)37,36,37
   36 IF(DY-DALFA)37,38,37
   37 FY=F
      DY=DALFA
      AMBDA=AMBDA-ALFA
      GO TO 20
38    ET=0.
      DO 39 J=1,N
      K=J+N
      V(K)=X(J)-V(K)
39    ET=ET+ABS(V(K))
      IF(KOUNT-N1)41,40,40
   40 IF(ET-EPS)45,45,41
   41 IF(OLDF-F+EPS)19,25,42
   42 OLDG=GNRM
      IF(KOUNT-LIMIT)43,44,44
   43 IER=0
      GO TO 1
   44 IER=1
      IF(GNRM-EPS)46,46,47
   45 IF(GNRM-EPS)46,46,25
   46 IER=0
   47 RETURN
      END



      SUBROUTINE FUNCT
      DIMENSION EPS(50)
      COMMON IER
      COMMON N,ENT(2,50),S(50),X(100),F,G(100)
      COMMON NLU,NCU,TEI
      COMMON NCUB,NLUB,NEN
      DO 1402 L=1,NLU
      EPS(L)=0.
      IF(NCUB-L)1300,1301,1301
 1301 LIM=L
      GO TO 1302
 1300 LIM=NCUB
 1302 CONTINUE
      DO 1401 IEN=1,NEN
      DO 1400 I=1,LIM
      IMO=I+(IEN-1)*NCUB
      LMIP1=L-I+1
 1400 EPS(L)=EPS(L)+ENT(IEN,LMIP1)*X(IMO)
 1401 CONTINUE
 1402 CONTINUE
      DO 602 I=1,NLU
  602 EPS(I)=(S(I)-EPS(I)*TEI)
      F=0.
      DO 603 I=1,NLU
  603 F=F+(EPS(I))**2
      DO 1604 IEN=1,NEN
      DO 1601 I=1,NCUB
      IMO=I+(IEN-1)*NCUB
      G(IMO)=0.
      LIM=NLU-I+1
      DO 1600 K=1,LIM
      INDI=K+I-1
 1600 G(IMO)=G(IMO)+ENT(IEN,K)*EPS(INDI)
 1601 CONTINUE
 1604 CONTINUE
      DO 605 I=1,NCU
  605 G(I)=2*TEI*G(I)
      WRITE(3,100)F
  100 FORMAT(' ',10X,E14.7)
      RETURN
      END
```

```
*ONE WORD INTEGERS
*IOCS(CARD,1132 PRINTER)
*LIST SOURCE PROGRAM
      DIMENSION A(10,11),SOL(10),AS(10,10)
      DIMENSION E(50),S(50),FIP(50)
      DIMENSION FI(50)
      DIMENSION HR(50)
      READ(2,1001)NS
      READ(2,1001)NP
      READ(2,1026)TEI
 1026 FORMAT(F8.4)
 1001 FORMAT(I2)
      KMUMA=NS+1
      DO 765 I=1,NP
      READ(2,1790)HR(I)
 1790 FORMAT(F14.7)
      E(I)=1.
  765 CONTINUE
C DE REPONSE IMPULS A REP INDICIELLE
      S(1)=0.
      S(2)=(HR(1)+HR(2))/2.
      DO 700 I=1,NP
      S(I)=(HR(1)+HR(I))/2.
      JU=I-1
      DO 701 K=2,JU
      II=I-K+1
      S(I)=S(I)+HR(II)
  701 CONTINUE
  700 CONTINUE
      T=(NP-1)*TEI
      LIM=50
      DO 1200 I=1,KMUMA
      DO 1201 J=1,KMUMA
 1201 AS(I,J)=0.
 1200 CONTINUE
C REMPLISSAGE DE LA MATRICE PAR BANDE HORIZONTALE
      IDECA=0
      IDEO=0
      LARBA=KMUMA
      CALL BANDE(LARBA,IDECA,IDEO,KMUMA,T,NS,S,NP,TEI,AS)
      DO 1105 LICON=1,KMUMA
C RECOPIE MATRICE SAUVEGARDEE.
      DO 1005 I=1,KMUMA
      DO 1006 J=1,KMUMA
      A(I,J)=AS(I,J)
 1006 CONTINUE
 1005 CONTINUE
C  REMPLISSAGE COLONNE DE DROITE
      KM=KMUMA+1
      DO 1004  I=1,KMUMA
 1004 A(I,KM)=0.
      A(LICON,KM)=1.
C RESOLUTION DU SYSTEME LINEAIRE
      CALL RESO(A,SOL,KMUMA)
C ICI ON A LES COEFFICIENTS DE FIP POUR LICON
C CALCUL DES RESULTATS
      DO 1008 I=1,LIM
 1008 FI(I)=0.
      DO 1009 I=1,KMUMA
      IO=I-1
      CALL FIPDE(T,NS,IO,0.,FIP,IFIP)
      DO 1007 J=1,IFIP
 1007 FI(J)=FI(J)+SOL(I)*FIP(J)
 1009 CONTINUE
      CALL VALEU(RES,0.,FI,LIM)
      SOM=RES*E(1)/2.
      TEMPS=(NP-1)*TEI
      CALL VALEU(RES,TEMPS,FI,LIM)
      SOM=SOM+RES*E(NP)/2.
      NP1=NP-1
      DO 1012 IJ=2,NP1
      TEMPS=(IJ-1)*TEI
      CALL VALEU(RES,TEMPS,FI,LIM)
      SOM=SOM+RES*E(IJ)
 1012 CONTINUE
      WRITE(3,1789)SOM
 1789 FORMAT(' ',E14.7)
 1105 CONTINUE
      STOP
      END
```

```
*ONE WORD INTEGERS
*LIST SOURCE PROGRAM
      SUBROUTINE BANDE(LARBA,IDECA,IDEO,KMUMA,T,AS,G,NP,TEI,AS)
      DIMENSION FIP(50),G(50),AS(10,10)
      IF(LARBA-1)1499,1498,1498
 1498 CONTINUE
      DO 1500 I=1,LARBA
      DO 1001 J=1,KMUMA
      SOM=0.
      IM1=I-1+IDEO
      JM1=J-1
      CALL FIPDE(T,NS,JM1,IM1,FIP,IFIP)
       CALL VALEU(RES,0.,FIP,IFIP)
      SOM=RES*G(1)/2.
      TEMPS=(NP-1)*TEI
      CALL VALEU(RES,TEMPS,FIP,IFIP)
      SOM=SOM+RES*G(NP)/2.
      NPM1=NP-1
      DO 1002 IJ=2,NPM1
      TEMPS=(IJ-1)*TEI
      CALL VALEU(RES,TEMPS,FIP,IFIP)
      SOM=SOM+RES*G(IJ)
 1002 CONTINUE
      KDE=IFIP
      IKDE=(KDE/2)*2
      IF(KDE-IKDE)1100,1101,1100
 1100 SOM=-SOM
 1101 CONTINUE
      IMOD=I+IDECA
      AS(IMOD,J)=SOM
 1001 CONTINUE
 1500 CONTINUE
 1499 CONTINUE
      RETURN
      END
```

```
*ONE WORD INTEGERS
*LIST SOURCE PROGRAM
      SUBROUTINE FIPDE(T,NS,KMU,KDE,FIP,IFIP)
C  MODE CALCULE LE POLYNOME FIP   DERIVE KDE FOIS
C    FIP=(T*A-X**2)**NS  MULTIPLIE PAR POLYNOME DE DEGRE KMU
C
      DIMENSION X(3),P(50),Y(50),XMUL(50),FIP(50),FDER(50)
      LIM=50
      DO 203 I=1,LIM
      P(I)=0.
      Y(I)=0.
      XMUL(I)=0.
      FIP(I)=0.
      FDER(I)=0.
  203 CONTINUE
      X(1)=0.
       X(2)=T
       X(3)=-1.
       IDIMY=1
       Y(1)=1.
       DO 2 I=1,NS
       IDIMX=3
      CALL PRPY(P,IP,X,IDIMX,Y,IDIMY)
      IDIMY=IP
      DO 3 K=1,IP
    3 Y(K)=P(K)
    2  CONTINUE
      KMU=KMU+1
       DO 100 I=1,LIM
  100  XMUL(I)=0.
       XMUL(KMU)=1.
      CALL PRPY(FIP,IFIP,XMUL,KMU,P,IP)
      IF(KDE)201,201,202
  202 DO 200 J=1,KDE
      CALL PDER(FDER,IDER,FIP,IFIP)
      FDER(IFIP)=0.
      DO 300 I=1,LIM
  300 FIP(I)=FDER(I)
      IFIP=IDER
  200  CONTINUE
  201  CONTINUE
       RETURN
       END
```

```
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
      SUBROUTINE RESO(A,SOL,IDIM)
      DIMENSION A(10,11),SOL(10)
      IDA=IDIM+1
      JJ=0.
      DO 20 J=2,IDIM
      A(1,J)=A(1,J)/A(1,1)
   20 CONTINUE
      DO 30 I=2,IDIM
      I1=I-1
      DO 40 J=I,IDIM
      ALPHA=0.
      BETA=0.
      IF(J-1)40,6,7
    7 DO 50 K=1,I1
      ALPHA=ALPHA+A(J,K)*A(K,I)
      BETA=BETA+A(I,K)*A(K,J)
   50 CONTINUE
      A(J,I)=A(J,I)-ALPHA
      A(I,J)=(A(I,J)-BETA)/A(I,I)
      GO TO 40
    6 ALPHA=0.
      DO 60 KK=1,I1
      ALPHA=ALPHA+A(I,KK)*A(KK,I)
   60 CONTINUE
      A(I,I)=A(J,I)-ALPHA
      IF(A(I,I))40,10,40
   10 K=I+JJ+1
      DO 11 L=1,IDA
      B1=A(I,L)
      A(I,L)=A(K,L)
      A(K,L)=B1
   11 CONTINUE
      JJ=JJ+1
      GO TO 6
   40 CONTINUE
   30 CONTINUE
      A(1,IDA)=A(1,IDA)/A(1,1)
      DO 70 I=2,IDIM
      BETA=0.
      I1=I-1
      DO 80 K=1,I1
      BETA=BETA+A(I,K)*A(K,IDA)
   80 CONTINUE
      A(I,IDA)=(A(I,IDA)-BETA)/A(I,I)
   70 CONTINUE
      SOL(IDIM)=A(IDIM,IDA)
      K=IDIM
  121 ALPHA=0.
      K=K-1
      IF(K) 120,120,110
  110 KK=K+1
      DO 180 L=KK,IDIM
      ALPHA=ALPHA+A(K,L)*SOL(L)
  180 CONTINUE
      SOL(K)=A(K,IDA)-ALPHA
      GO TO 121
  120 CONTINUE
      RETURN
      END
```

```
*ONE WORD INTEGERS
*LIST SOURCE PROGRAM
      SUBROUTINE VALEU(RES,ARG,X,IDIMX)
C VALEU CALCULE LA VALEUR DE PIP POUR ARG
C
      DIMENSION X(1)
      RES=0.
      J=IDIMX
 1    IF(J)3,3,2
 2    RES=RES*ARG+X(J)
      J=J-1
      GO TO 1
 3    RETURN
      END
```

```
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
      SUBROUTINE PDER(Y,IDIMY,X,IDIMX)
C PDER DERIVE UN POLYNOME
C
      DIMENSION X(1),Y(1)
      IF (IDIMX-1) 3,3,1
    1 IDIMY=IDIMX-1
      EXPT=0.
      DO 2 I=1,IDIMY
      EXPT=EXPT+1.
    2 Y(I)=X(I+1)*EXPT
      GO TO 4
    3 IDIMY=0
 4    RETURN
      END
```

```
*ONE WORD INTEGERS
*LIST SOURCE PROGRAM
      SUBROUTINE PMPY(Z,IDIMZ,X,IDIMX,Y,IDIMY)
C PMPY MULTIPLIE 2 POLYNOMES
C
      DIMENSION Z(1),X(1),Y(1)
      IF(IDIMX*IDIMY)10,10,20
   10 IDIMZ=0
      GO TO 50
   20 IDIMZ=IDIMX+IDIMY-1
      DO 30 I=1,IDIMZ
   30 Z(I)=0.
      DO 40 I=1,IDIMX
      DO 40 J=1,IDIMY
      K=I+J-1
   40 Z(K)=X(I)*Y(J)+Z(K)
   50 RETURN
      END
```

```
*ONE WORD INTEGERS
*IOCS(CARD,1132 PRINTER)
*LIST SOURCE PROGRAM
      COMMON N,CN(5),CD(5),TEI,M,HH(50),RE(50)
      COMMON IV,MI,HR(50),TE,X(5),F,G(5)
      READ(2,1006)TEI
 1006 FORMAT(F8.4)
      READ(2,1001)MI
 1001 FORMAT(I2)
 1004 CONTINUE
      DO 2000 I=1,MI
 2000 READ(2,1002)HR(I)
 1002 FORMAT(E14.7)
      READ(2,1001)N
      N1=N+1
      DO 1008 I=1,N1
 1008 READ(2,1002)CD(I)
      WRITE(3,901)(CD(I),I=1,N1)
 901  FORMAT(' ',5E15.7)
      CALL MINUS
      DO 2003 I=1,N
2003  WRITE(3,2020)X(I)
2020  FORMAT(' ',E14.7)
      DO 2021 I=1,N
 2021 CN(I)=X(I)
      IV=-1
      TE=TEI
      CALL REP
      DO 2004 I=1,MI
 2004 WRITE(3,2020)HH(I)
      GO TO 1004
      END

FEATURES SUPPORTED
 ONE WORD INTEGERS
 IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR
 COMMON     352  VARIABLES       4  PROGRAM     216


 *LIST SOURCE PROGRAM
 *ONE WORD INTEGERS
      SUBROUTINE MINUS
      DIMENSION V(10)
      COMMON N,CN(5),CD(5),TEI,M,HH(50),RE(50)
      COMMON IV,MI,HR(50),TE,X(5),F,G(5)
      DO 505 I=1,N
 505  X(I)=1.
      EST=0.
      QS=0.
      DO 110 I=1,MI
  110 QS=QS+HR(I)*HR(I)*TEI
      EPSIL=0.005*QS
      EPS=0.000001
      WRITE(3,1001)QS
 1001 FORMAT(' QS=',E14.7)
      LIMIT=1000
      CALL MINOS
      KOUNT=0
      IER=0
      N1=N+1
    1 DO 43 II=1,N1
      KOUNT=KOUNT+1
      OLDF=F
      GNRM=0.
      DO 2 J=1,N
    2 GNRM=GNRM+G(J)*G(J)
      IF(GNRM)46,46,3
    3 IF(II-1)4,4,6
    4 DO 5 J=1,N
    5 V(J)=-G(J)
      GO TO 8
    6 AMBDA=GNRM/OLDG
      DO 7 J=1,N
    7 V(J)=AMBDA*V(J)-G(J)
```

```
    8 DY=0.
      HNRM=0.
      DO 9 J=1,N
      K=J+N
      V(K)=X(J)
      HNRM=HNRM+ABS(V(J))
    9 DY=DY+V(J)*G(J)
      IF(DY)10,42,42
   10 SNRM=1./HNRM
      FY=F
      ALFA=2.*(EST-F)/DY
      AMBDA=SNRM
      IF(ALFA)13,13,11
   11 IF(ALFA-AMBDA)12,13,13
   12 AMBDA=ALFA
   13 ALFA=0.
   14 FX=FY
      DX=DY
      DO 15 I=1,N
   15 X(I)=X(I)+AMBDA*V(I)
      CALL MINOS
      FY=F
      DY=0.
      DO 16 I=1,N
   16 DY=DY+G(I)*V(I)
      IF(DY)17,38,20
   17 IF(FY-FX)18,20,20
   18 AMBDA=AMBDA+ALFA
      ALFA=AMBDA
      IF(HNRM*AMBDA-1.E10)14,14,19
   19 IER=2
      RETURN
20    ET=0.
   21 IF(AMBDA)22,38,22
   22 Z=3.*(FX-FY)/AMBDA+DX+DY
      IF(ABS(Z)-ABS(DX))100,101,101
  101 PROV=ABS(Z)
      GO TO 102
  100   PROV=ABS(DX)
  102 IF(PROV-ABS(DY))103,104,104
  103 ALFA=ABS(DY)
      GO TO 105
  104 ALFA=PROV
  105 CONTINUE
      DALFA=Z/ALFA
      DALFA=DALFA*DALFA-DX/ALFA*DY/ALFA
      IF(DALFA)23,27,27
   23 DO 24 J=1,N
      K=N+J
   24 X(J)=V(K)
      CALL MINOS
   25 IF(IER)47,26,47
   26 IER=-1
      GOTO 1
   27 W=ALFA*SQRT(DALFA)
      ALFA=(DY+W-Z)*AMBDA/(DY+2.*W-DX)
      DO 28 I=1,N
   28 X(I)=X(I)+(ET-ALFA)*V(I)
      CALL MINOS
      IF(F-FX)29,29,30
   29 IF(F-FY)38,38,30
   30 DALFA=0.
      DO 31 I=1,N
   31 DALFA=DALFA+G(I)*V(I)
      IF(DALFA)32,35,35
   32 IF(F-FX)34,33,35
   33 IF(DX-DALFA)34,38,34
   34 FX=F
      DX=DALFA
      ET=ALFA
      AMBDA=ALFA
      GO TO 21
   35 IF(FY-F)37,36,37
   36 IF(DY-DALFA)37,38,37
   37 FY=F
      DY=DALFA
      AMBDA=AMBDA-ALFA
      GO TO 20
38    ET=0.
      DO 39 J=1,N
      K=J+N
      V(K)=X(J)-V(K)
39    ET=ET+ABS(V(K))
```

```
      IF(F-EPSIL)46,46,50
 50   CONTINUE
      IF(KOUNT-N1)41,40,40
   40 IF(ET-EPS)45,45,41
   41 IF(OLDF-F+EPS)19,25,42
   42 OLDG=GNRM
      IF(KOUNT-LIMIT)43,44,44
   43 IER=0
      GO TO 1
   44 IER=1
      IF(GNRM-EPS)46,46,47
   45 IF(GNRM-EPS)46,46,25
   46 IER=0
   47 RETURN
      END
```

```
FEATURES SUPPORTED
 ONE WORD INTEGERS

CORE REQUIREMENTS FOR MINUS
 COMMON     352  VARIABLES      74  PROGRAM     916
```

```
*ONE WORD INTEGERS
*LIST SOURCE PROGRAM
      SUBROUTINE MINOS
      DIMENSION B(50)
      COMMON N,CN(5),CD(5),TEI,M,HH(50),RE(50)
      COMMON IV,MI,HR(50),TE,X(5),F,G(5)
      WRITE(3,900)(X(I),I=1,N)
 900  FORMAT(' ',5E15.7)
      DO 1001 I=1,N
1001  CN(I)=X(I)
      CALL SISI
      F=0.
      DO 1002 I=1,MI
      B(I)=HH(I)
1002  F=F+(HH(I)-HR(I))**2
      F=F*TEI
      WRITE(3,900)F
      DO 1008 IND=1,N
      DO 1003 I=1,N
1003  CN(I)=0.
      CN(IND)=1.
      CALL SISI
      G(IND)=HH(1)*(B(1)-HR(1))+HH(N)*(B(N)-HR(N))*TEI
      DO 1007 I=1,MI
1007  G(IND)=G(IND)+2*(HH(I)*(B(I)-HR(I)))*TEI
1008  CONTINUE
      RETURN
      END
```

```
FEATURES SUPPORTED
 ONE WORD INTEGERS

CORE REQUIREMENTS FOR MINOS
 COMMON     352  VARIABLES     110  PROGRAM     236
```

```
*ONE WORD INTEGERS
*LIST SOURCE PROGRAM
      SUBROUTINE SISI
      DIMENSION RE1(50),RE2(50)
      COMMON N,CN(5),CD(5),TEI,M,HH(50),RE(50)
      COMMON IV,MI,HR(50),TE,X(5),F,G(5)
      N1=N+1
      CN(N1)=0.
      TE=TEI
      M=MI
      IV=-1
   74 CONTINUE
      CALL REP
      DO 710 K=1,MI
  710 RE1(K)=RE(K)
      M=2*M-1
      TE=TE/2.
      CALL REP
      DO 71 K=1,MI
   71 RE2(K)=RE(K)
      WRITE(3,102)IV
  102 FORMAT(' ',I4)
      SOM=0.
      DEL=0.
      DO 72 K=1,MI
      SOM=SOM+(RE2(K))**2
   72 DEL=DEL+(RE1(K)-RE2(K))**2
      DELTA=0.01*SOM
      IF(DEL-DELTA)63,64,64
   64 CONTINUE
      M=2*M-1
      TE=TE/2.
      GO TO 74
   63 CONTINUE
      RETURN
      END

FEATURES SUPPORTED
 ONE WORD INTEGERS

CORE REQUIREMENTS FOR SISI
 COMMON     352  VARIABLES     210  PROGRAM     190

*ONE WORD INTEGERS
*LIST SOURCE PROGRAM
      SUBROUTINE REP
      DIMENSION XN(20),XD(20),T(9,20),A(20),B(20),P(20),ST(50)
      COMMON N,CN(5),CD(5),TEI,M,HH(50),RE(50)
      COMMON IV,MI,HR(50),TE,X(5),F,G(5)
      DO 21 I=1,9
      DO 22 J=1,20
      T(I,J)=0.
   22 CONTINUE
   21 CONTINUE
      N1=N+1
      Q=(TE**7)/720.
      T(8,3)=Q
      T(8,4)=57*Q
      T(8,5)=302*Q
      T(8,6)=302*Q
      T(8,7)=57*Q
      T(8,8)=Q
      Q=(TE**6)/252./120.
      T(7,1)=Q
      T(7,2)=-6*Q
        T(7,3)=267*Q
      T(7,4)=6532*Q
      T(7,5)=16647*Q
      T(7,6)=6546*Q
      T(7,7)=253*Q
      Q=(TE**5)/24.
      T(6,3)=Q
      T(6,4)=11*Q
      T(6,5)=11*Q
      T(6,6)=Q
      Q=TE*TE*TE*TE
      T(5,1)=-Q/720.
      T(5,2)=Q*31./180.
      T(5,3)=Q*79./120.
      T(5,4)=Q*31./180.
      T(5,5)=-Q/720.
```

```
      Q=TE*TE*TE
      T(4,2)=Q/2.
      T(4,3)=Q/2.
      Q=TE*TE
      T(3,1)=Q/12.
      T(3,2)=Q*10./12.
      T(3,3)=Q/12.
      Q=TE
      T(2,1)=Q/2.
      T(2,2)=Q/2.
      T(1,1)=1.
      DO 23 J=1,20
      XN(J)=0.
   23 XD(J)=0.
      DO 24 I=1,N1
      DO 25 IK=1,20
   25 P(IK)=T(I,IK)
      K=N1-I
      DO 6 L=1,20
      A(L)=0.
      B(L)=0.
    6  CONTINUE
      IF(K)1,1,2
    2 A(1)=P(1)
      B(1)=0.
      DO 5 L=2,20
      A(L)=P(L)
    5 B(L)=P(L-1)
      DO 4 L=1,20
    4   P(L)=A(L)-B(L)
      K=K-1
      IF(K)1,1,2
    1 CONTINUE
      DO 26 J=1,20
      JM=N1-I+1
      XN(J)=P(J)*CN(JM)+XN(J)
      XD(J)=P(J)*CD(JM)+XD(J)
   26  CONTINUE
   24  CONTINUE
      IV=IV+1
      IF(IV)123,123,124
  123 DO 511 K=1,MI
      HH(K)=XN(1)/XD(1)
      XN(20)=0.
      DO 510 I=1,20
  510 XN(I-1)=XN(I)-HH(K)*XD(I)
  511 ST(K)=0.
      GO TO 125
  124 CONTINUE
      DO 11 K=1,MI
      KT=2**IV
      HH(K)=XN(1)/XD(1)
      XN(20)=0.
      DO 10 I=1,20
   10   XN(I-1)=XN(I)-HH(K)*XD(I)
      ST(K)=0.
      DO 11 J=2,KT
      HP=XN(1)/XD(1)
      XN(20)=0.
      DO 110 I=1,20
  110 XN(I-1)=XN(I)-HP*XD(I)
   11 ST(K)=ST(K)+HP
  125 CONTINUE
      HH(1)=TE*CN(N)/CD(N1)
      RE(1)=0.
      RE(2)=(HH(1)+HH(2))*0.5+ST(1)
      DO 105 I=3,MI
      RE(I)=(HH(1)+HH(I))*0.5
      IM1=I-1
      DO 103 IK=1,IM1
  103 RE(I)=RE(I)+ST(IK)
      DO 104 IL=2,IM1
  104 RE(I)=RE(I)+HH(IL)
  105 CONTINUE
      DO 211 I=1,MI
  211 HH(I)=HH(I)/TE
      RETURN
      END
```

FEATURES SUPPORTED
 ONE WORD INTEGERS

CORE REQUIREMENTS FOR REP
 COMMON 352 VARIABLES 690 PROGRAM 1070

```
*ONE WORD INTEGERS
*IOCS(CARD,1132 PRINTER)
*LIST SOURCE PROGRAM
      INTEGER CARTE
      DIMENSION E(50),RE1(50)
      COMMON N,CN(5),CD(5),TE,HH(50),RE(50),IV,MI
      CARTE=2
98    READ(CARTE,131)N
131   FORMAT(I2)
      N1=N+1
      CN(N1)=0.
      DO 1032 J=1,N
 1032 READ(CARTE,1024)CN(J)
      DO 1033 J=1,N1
 1033 READ(CARTE,1024)CD(J)
 1024 FORMAT(E14.7)
      READ(CARTE,35)TE
35    FORMAT(F8.4)
      TEI=TE
      READ(CARTE,345)MI
345   FORMAT(I4)
      DO 141 I=1,MI
  141 READ(CARTE,35)E(I)
      WRITE(3,31)
31    FORMAT(//,15X,'SIMULATION DE SYSTEMES LINEAIRES')
      WRITE(3,132)
132   FORMAT(15X,32('='),/)
      WRITE(3,33)N
33    FORMAT(' ORDRE DE LA TRANSMITTANCE =',I2)
      WRITE(3,34)
34    FORMAT(' COEFFICIENTS DU NUMERATEUR =',I2)
      WRITE(3,134)(CN(J),J=1,N)
134   FORMAT(10(F8.4))
      WRITE(3,41)
41    FORMAT(' COEFFICIENTS DU DENOMINATEUR')
      WRITE(3,134)(CD(J),J=1,N1)
      WRITE(3,37)TE
37    FORMAT(' PAS DU CALCUL =',F8.4)
      WRITE(3,110)
110   FORMAT(//,15X,'REPONSE DU SYSTEME',/)
      WRITE(3,111)
111   FORMAT(8X,'TEMPS',8X,'ENTREE',8X,'SORTIE')
      IV=-1
   74 CONTINUE
      CALL IMPU
      DO 710 K=1,MI
  710 RE1(K)=RE(K)
      TE=TE*0.5
      CALL IMPU
      SOM=0.
      DEL=0.
      DO 72 K=1,MI
      SOM=SOM+RE(K)*RE(K)
   72 DEL=DEL+(RE1(K)-RE(K))*(RE1(K)-RE(K))
      DELTA=0.01*SOM
      IF(DEL-DELTA)63,64,64
   64 CONTINUE
      TE=TE*0.5
      GO TO 74
   63 CONTINUE
      TOT=0.
      TEMPS=0.
      WRITE(3,109)TEMPS,E(1),TOT
      DO 142 I=2,MI
      TOT=(HH(1)*E(I)+HH(I)*E(1))*TEI*0.5
      JU=I-1
      IF(JU-2)143,144,144
  144 CONTINUE
      DO 88 K=2,JU
      II=I-K+1
   88 TOT=TOT+HH(II)*TEI*E(K)
  143 CONTINUE
      TEMPS=(I-1)*TEI
      WRITE(3,109)TEMPS,E(I),TOT
  109 FORMAT(7X,F8.4,5X,F8.4,6X,F8.4)
  142 CONTINUE
      GO TO 98
      END
```

```
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
      SUBROUTINE IMPU
      DIMENSION ST(50)
      DIMENSION XN(20),XD(20),T(9,20),A(20),B(20),P(20)
      COMMON N,CN(5),CD(5),TE,HH(50),RE(50),IV,M1
      DO 21 I=1,9
      DO 22 J=1,20
      T(I,J)=0.
   22 CONTINUE
   21 CONTINUE
      N1=N+1
      Q=(TE**7)/720.
      T(8,3)=Q
      T(8,4)=57*Q
      T(8,5)=302*Q
      T(8,6)=302*Q
      T(8,7)=57*Q
      T(8,8)=Q
      Q=(TE**6)/252./120.
      T(7,1)=Q
        T(7,3)=267*Q
      T(7,2)=-6*Q
      T(7,4)=6532*Q
      T(7,5)=16647*Q
      T(7,6)=6546*Q
      T(7,7)=253*Q
      Q=(TE**5)/24.
      T(6,3)=Q
      T(6,4)=11*Q
      T(6,5)=11*Q
      T(6,6)=Q
      Q=TE*TE*TE*TE
      T(5,1)=-Q/720.
      T(5,2)=Q*31./180.
      T(5,3)=Q*79./120.
      T(5,4)=Q*31./180.
      T(5,5)=-Q/720.
      Q=TE*TE*TE
      T(4,2)=Q*0.5
      T(4,3)=Q*0.5
      Q=TE*TE
      T(3,1)=Q/12.
      T(3,2)=Q*10./12.
      T(3,3)=Q/12.
      Q=TE
      T(2,1)=Q*0.5
      T(2,2)=Q*0.5
      T(1,1)=1.
      DO 23 J=1,20
      XN(J)=0.
   23 XD(J)=0.
      DO 24 I=1,N1
      DO 25 IK=1,20
   25 P(IK)=T(I,IK)
      K=N1-I
      DO 6 L=1,20
      A(L)=0.
      B(L)=0.
    6 CONTINUE
      IF(K)1,1,2
    2 A(1)=P(1)
      B(1)=0.
      DO 5 L=2,20
      A(L)=P(L)
    5 B(L)=P(L-1)
      DO 4 L=1,20
    4 P(L)=A(L)-B(L)
      K=K-1
      IF(K)1,1,2
    1 CONTINUE
      DO 26 J=1,20
      JM=N1-I+1
      XN(J)=P(J)*CN(JM)+XN(J)
      XD(J)=P(J)*CD(JM)+XD(J)
   26 CONTINUE
   24 CONTINUE
```

```
      IV=IV+1
      IF(IV)123,123,124
  123 DO 511 K=1,MI
      HH(K)=XN(1)/XD(1)
      XN(20)=0.
      DO 510 I=1,20
  510 XN(I-1)=XN(I)-HH(K)*XD(I)
  511 ST(K)=0.
      GO TO 125
  124 CONTINUE
      DO 11 K=1,MI
      KT=2**IV
      HH(K)=XN(1)/XD(1)
      XN(20)=0.
      DO 10 I=1,20
   10 XN(I-1)=XN(I)-HH(K)*XD(I)
      ST(K)=0.
      DO 11 J=2,KT
      HP=XN(1)/XD(1)
      XN(20)=0.
      DO 110 I=1,20
  110 XN(I-1)=XN(I)-HP*XD(I)
   11 ST(K)=ST(K)+HP
  125 CONTINUE
      HH(1)=TE*CN(N)/CD(N1)
      RE(1)=0.
      RE(2)=(HH(1)+HH(2))*0.5+ST(1)
      DO 105 I=3,MI
      RE(I)=(HH(1)+HH(I))*0.5
      IM1=I-1
      DO 103 IK=1,IM1
  103 RE(I)=RE(I)+ST(IK)
      DO 104 IL=2,IM1
  104 RE(I)=RE(I)+HH(IL)
  105 CONTINUE
      DO 211 I=1,MI
  211 HH(I)=HH(I)/TE
      RETURN
      END
```

BIBLIOGRAPHIE

Des méthodes générales d'identification .

[1]- LOEB J. : " identification expérimentale des processus industriels . "
Dunod . Paris 1967 .

[2]- Compte-rendu du Symposium de l'International Federation of Automatic Control . Prague 1967 .

[3]- CUENOD M. et SAGE A. P. : " Comparaison of some methods used for process identification . "
(survey report de l'I.F.A.C. Prague 1967)

[4]-CUENOD M. : " Introduction à quelques méthodes d'identification "
Conférences à la Faculté des Sciences -
Université Laval - Quebec (quebec)

[5]- MARCHETTA H. : " L'identification des procédés industriels "
in " la technique moderne " n° 4 avril 1970
Dunod - Paris .

[6]- STREJC V.: " Détermination approchée des caractéristiques de régulation d'un processus apériodique "
in " Automatisme " Tome V n° 3 mars 1960
Dunod - Paris .

[7] - RÖDEL V. : " Méthode simultanée d'identification des paramètres et d'estimation d'état d'un processus non stationnaire ."
Thèse à l'Ecole des Gradués de l'Université Laval
Quebec (mars 1969).

[8] - PETERKA et VIDINCEV : " Rational-Fraction approximation of transfer functions ."
Rapport 2 . 1 Symposium I.F.A.C. Prague 1967

[9] - " Identification, optimalisation et stabilité des systèmes automatiques ."
Actes du Congrès d'Automatique Théorique - Paris 1965 .
Dunod - Paris 1967 .

Des fonctions de corrélation .

[10] - SURDIN M. et KASSIMATIS C. : "Corrélation-function analysis of systems obeying linear differential equations."
in " Noise analysis in nuclear systems "
edited by R;UHRIG .U.S.Atomic Energy Commission .

[11] - BENES J. : " Statistique dynamique des systèmes de régulation "
Dunod -Paris 1964.

[12] - SOLODOVMIKOV V.V. : " Dynamique statistique des systèmes linéaires de commande automatique ."
Dunod -Paris 1965 .

De la déconvolution numérique .

[13] - BARRAUD A. :" Estimation des réponses impulsionnelles d'un processus ,à partir d'un enregistrement de courte durée ."
Conférence faite à l'E.N.S.M. de Nantes 25-6-1971

De la méthode de simulation des systèmes linéaires .

[14] - JURY E. I. : " Theory and application of the Z transform method "
John Wiley 1964 .

[15] - GIBSON J. E. : " Non linear automatic Control ."
Mac Graw Hill 1963 .

[16] - BOXER R. et THALER S. : " A simplified method for solving linear and non-linear systems . "
Prod. Inst. Radio Engineers - Vol. 44 . p. 89
1956

De la méthode de recherche de l'optimum d'une fonction de plusieurs variables .

[17] - STIEFEL : " Introduction à la mathématique numérique . "
page 180 . Dunod .

[18] - " Scientific Subroutine Package . " I B M Système 360
360 A - CM - 03X . Version III H 20 6 0205 - 3
pages 225 à 229 .

[19] - VIGNES J. : " Etude et mise en oeuvre d'algorithmes de recherche d'un extrénum d'une fonction de plusieurs variables . "
Thèse Sciences Appliquées . Paris 27-2-1969 .

[20] - HESTENES M. R. et STIEFEL E. : " Methods of conjugate gradients for solving linear systems . "
Journal of Research of National Bureau of Standards . 1952 - Vol. 49
pages 409 à 436 .

[21] - POLAK E. et RIBIERE G. : " Note sur la convergence de méthode de directions conjuguées . "

Revue Française d' Informatique et de recherche opérationnelle . Dunod - Paris janv.-fév. 1969 pages 35 à 43 .

[22]- FLETCHER R. et REEVES C. M. : " Function minimization by conjugate gradients . "
The Computer Journal . Vol. 7 - issue 2 - 1964
pages 149 à 154 .

Publications personnelles .

[23]- SAGASPE J.P. : " Principe d'une méthode d'identification d'un système linéaire , à partir de sa réponse impulsionnelle . " Note à l'Académie des Sciences de Paris (Séance du 24 mai 1971)
t. 272 , p. 1533-1536 (7juin 1971) Série A .

[24]- SAGASPE J.P. : " Méthode des fonctions automodulatrices pour l'identification des systèmes . " Note à l'Académie des Sciences de Paris (Séance du 20 décembre 1971)